South China University of Technology

本科毕业设计（论文）

Fargues-Fontaine 曲线的几何单连通性

学　　院	数学学院
专　　业	数学与应用数学
学生姓名	谌越
学生学号	201930234309
指导老师	孙浩
提交日期	2023 年 06 月 06 日

华南理工大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：　　　　　　　　　　日期：2023 年 06 月 06 日

摘 要

我们首先介绍了联系特征 0 域与特征 p 域的倾斜 (tilting) 和逆倾斜 (untilting) 操作, 随后介绍进制空间版本的 Fargues-Fontaine 曲线 $\mathcal{X}$ 和以及任意局部域的情形. 通过一些 p 进分析的手段, 我们分析了 p 进全纯函数环 B 的结构, 并给出了概形版本的 Fargues-Fontaine 曲线 X "参数化"所有逆倾斜的证明. 我们计算了 X 的 Picard 群和线丛的上同调, 并给出了 X 上的 Harder-Narasimhan 分解; 更进一步, 类比于黎曼球面, 我们不加证明地陈述在 X 上每一个向量丛都能分解为半稳定向量丛的直和, 并由此导出 X 是几何单连通的结果. 以上述的所有结论并非原创, 本文的主要参考是 [Lur].

关键词: 倾斜; 逆倾斜; Fargues-Fontaine 曲线

Abstract

First, we introduce the tilting and untilting operations between the field of characteristic 0 and the field of characteristic p. Then, we discuss the adic space version of the Fargues-Fontaine curve $\mathcal{X}$ in the context of any local field. Using some p-adic analysis techniques, we analyze the structure of the p-adic analytic function ring B and give a proof of the Fargues-Fontaine curve X parameterizing all untilts (as a scheme). We calculate the Picard group and the cohomology of line bundles on X and give the Harder Narasimhan decomposition of X. Furthermore, by analogy with the Riemann sphere, we state without proof that every vector bundle on X can be decomposed into a direct sum of semistable vector bundles, which leads to the geometric simply connectedness of X. All these results are not the author's original work, our main reference is [Lur].

Keywords: Tilting; Untilting; Fargues-Fontaine curve

目　　录

第一章 绪论

1.1 选题背景与意义

Fargues-Fontaine 曲线（以下简称为 FF curve）首次被 Laurent Fargues 和 Jean-Marc Fontaine 一同发现, 被认为是 p 进算术几何中的基本曲线 (fundamental curve). 目前, Fargues-Fontaine 曲线在算术几何中扮演着越来越重要的角色, 对于了解 p 进 Hodge 理论、Langlands 纲领等方面都有着重要的应用.

除了 Fargues-Fontaine 曲线本身的研究, 与之相关的工作还包括对于其上的向量丛、线丛、Hodge-Tate 表示等的研究, 以及与 p-可除群、p-进 Galois 表示等的联系等方面的研究.

1.2 研究现状和相关工作

在这里简单罗列一些 Fargues-Fontaine 曲线的应用:

- 在 [FF18] 中, Fargues 和 Fontaine 利用曲线给出了 p 进 Hodge 理论的两个主要定理的证明, 即 weakly admissible implies admissible 和 de Rham implies potentially semi-stable.
- Fargues 通过该曲线重新证明了局部类域论.
- Fargues 和 Scholze 在 [FS21] 中对于局部 Langlands 对应应用了几何的想法. 他们方法的哲学大致可以描述为
$$\Big\{\text{局部 Langlands of } \mathbb{Q}_p\Big\} \cong \Big\{\text{几何 Langlands of } X\Big\}.$$

1.3 本文的论文结构与章节安排

本文共分为五章, 各章节内容安排如下:

第一章绪论.

第二章第一节给出倾斜与逆倾斜的定义. 证明特征 0 的完美胚域都通过倾斜得到特征 p 的完美胚域. 第二节引入 Witt 向量环, 并通过 distinguished 元素分类所有逆倾斜. 第三节定义进制空间版本的 Fargues-Fontaine 曲线. 第四节讨论任意局部域的情形.

第三章第一节通过范数给出环 B 的等价定义. 第二节引入 B_{dR} 定义曲线上的除子, 并分析分次环 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=p^n}$ 的结构. 第三节我们证明两个第二节用到的定理.

第四章第一节我们计算曲线 X 的 Picard 群并计算它们的上同调. 第二节我们给出

X 上的 Harder-Narasimhan 分解. 第三节我们引入 F-等晶体来分类所有 X 上的向量丛并以此证明 X 的几何单连通性.

附录中我们不加证明的引用进制空间的结论.

第二章 Fargues-Fontaine 曲线的构造

2.1 倾斜

在以下两节中, 我们在完美胚域的背景下介绍倾斜和反倾斜的操作.

记号 2.1. 我们称在域 K 上有赋值 $|\bullet|: K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 且 K 关于该赋值完备, 为完备赋值域 K. 我们用 $\mathcal{O}_K$ 表示 K 的整元素子环, 用 $\mathfrak{m}_K$ 表示 $\mathcal{O}_K$ 的极大理想, 用 $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ 表示 K 的剩余域. 若一个完备赋值域的剩余域 k 的特征为 p, 则称其为剩余特征为 p 的完备赋值域.

设 K 是剩余特征为 p 的完备赋值域, 我们用 $K^\flat$ 表示逆极限 (集合意义上的)

$$\cdots \xrightarrow{x \mapsto x^p} K \xrightarrow{x \mapsto x^p} K \xrightarrow{x \mapsto x^p} K,$$

其中的元素可以被表示为 $\{(x_0, x_1, \cdots) \mid x_i = x_{i+1}^p\}$. 我们对其装备逐项的自然乘法

$$\{x_i\}_{i \geq 0} \cdot \{y_i\}_{i \geq 0} = \{x_i y_i\}_{i \geq 0},$$

从而我们可以将 $K^\flat$ 看作一个交换幺半群, 但是我们也可以在 $K^\flat$ 上赋予一个自然的加法, 使得 $K^\flat$ 成为特征为 p 的域, 我们称之为域 K 的倾斜 *(tilting)*. 我们用 $\mathcal{O}_K^\flat$ 表示由 $\mathcal{O}_K$ 的元素组成的 $K^\flat$ 的子集, 并在 $\mathcal{O}_K$ 的层面上证明它.

定理 2.2. *设 K 是如上所述的剩余特征为 p 的完备赋值域, 则自然映射 $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ 诱导了一个双射*

$$\mathcal{O}_K^\flat \to \varprojlim(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{x \mapsto x^p} \cdots).$$

证明. 如果 K 的特征为 p, 则无需证明. 因此, 我们假设 K 的特征为 0. 由于 K 是完备的, 子环 $\mathcal{O}_K$ 同构于逆极限 $\varprojlim_n \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$. 一个基本的观察是, 对于任意的 $x, y \in \mathcal{O}_K$, 我们有

$$(x \equiv y \pmod{p^{n-1}}) \Rightarrow (x^p \equiv y^p \pmod{p^n}).$$

这个事实保证了这是一个双射. 为了更明确地写出来, 我们用 $Z(n)$ 表示集合的逆极限

$$\cdots \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K.$$

那么 $\mathcal{O}_K^\flat$ 同构于逆极限 $\varprojlim_n Z(n)$, 我们要证明的是映射 $\mathcal{O}_K^\flat \to Z(1)$ 是一个双射. 我们

只需证明每个过渡映射 $Z(n) \to Z(n-1)$ 是一个双射. 图形上, 我们只需证明在水平方向上取逆极限后, 以下图表诱导出同构.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \arrow[r, "x\mapsto x^p"] \arrow[d] & \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \arrow[r, "x\mapsto x^p"] \arrow[d] & \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{O}_K/p^{n-1}\mathcal{O}_K \arrow[r, "x\mapsto x^p"] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{O}_K/p^{n-1}\mathcal{O}_K \arrow[r, "x\mapsto x^p"] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{O}_K/p^{n-1}\mathcal{O}_K
\end{tikzcd}$$

根据我们的基本观察, 虚线箭头是唯一的, 因此它在取逆极限后诱导同构. □

推论 2.3. 设 K 是剩余特征为 p 的完备赋值域. 则我们得到一个特征为 p 的交换环 $\mathcal{O}_K^\flat$. 具体来说, 乘法是逐项的, 加法是通过前面定理中的双射（唯一地）得到的, 满足

$$\{x_n\}_{n\geq 0} + \{y_n\}_{n\geq 0} = \{z_n\}_{n\geq 0} \Rightarrow x_n + y_n \equiv z_n \pmod p.$$

注 2.4. 实际上, 加法可以更加明确地写出来. 设 $\{x_n\}_{n\geq 0}, \{y_n\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{O}_K^\flat$ 中的两个元素, $\{z_n\}_{n\geq 0} = \{x_n\}_{n\geq 0} + \{y_n\}_{n\geq 0}$. 写成 $z_m = x_m + y_m + pw$ 的形式, 其中 p 是剩余特征为 p 的情况下的素数, $w \in \mathcal{O}_K$. 我们有

$$\begin{aligned}
z_0 &= z_m^{p^m} \\
&= (x_m + y_m + pw)^{p^m} \\
&= \sum_{i=0}^{p^m} \binom{p^m}{i} (pw)^i (x_m + y_m)^{p^m - i} \\
&\equiv (x_m + y_m)^{p^m} \pmod{p^m}.
\end{aligned}$$

当 $m \to \infty$ 时, z_0 由极限 $\lim_{m\to\infty}(x_m+y_m)^{p^m}$ 给出. 同样地, 每个 z_n 由极限 $\lim_{m\to\infty}(x_{n+m}+y_{n+m})^{p^m}$ 给出.

设 K 是剩余特征为 p 的完备赋值域. 我们定义一个乘法映射 $\sharp : K^\flat \to K$, 它由 $x^\sharp = \{x_n\}_{n\geq 0} \mapsto x_0$ 给出. 根据定义, 它是乘性的. 对于每个 $x \in K^\flat$, 我们定义 $|x|_{K^\flat} = |x^\sharp|_K$.

例 2.5. 设 $K = \mathbb{Q}_p$ 是 p-进有理数, 则 $\mathcal{O}_K^\flat = \mathbb{F}_p$, $\sharp : \mathbb{F}_p \to \mathbb{Z}_p$ 是 Teichmuller 提升. 引入完美胚域的一个目的是保证它的倾斜足够大, 以至于有足够的有趣性质.

定义 2.6. 一个完美胚域是一个带有赋值 $|\cdot|_K : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的完备赋值域 K, 满足以下条件:

(A1) 剩余域 $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ 的特征为 p. 等价地, 该赋值是非阿基米德的, 或者 $|p|_K < 1$.

(A2) Frobenius 同态 $\varphi : \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K, x \mapsto x^p$ 是满射, 即 $\mathcal{O}_K$ 中的任何元素 x 都可以写成 $x = y^p + pz$, 其中 $y, z \in \mathcal{O}_K$.

(A3) 极大理想 $\mathfrak{m}_K$ 不能由 p 生成. 换句话说, 存在 $x \in \mathcal{O}_K$ 使得 $|p|_K < |x|_K < 1$.

注 2.7. 完美胚域的另一个等价定义是: 完美胚域是一个完备拓扑域 K, 其拓扑由一个秩为 1 的非离散赋值诱导. 很容易看出这个定义满足我们的定义. 反之, 我们只需要证明 $|\cdot|_K : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的像不是离散的即可. 选择 x 使得 $|p|_K < |x|_K < 1$, 由 (A2) 可知存在 $y, z \in \mathcal{O}_K$ 使得 $x = y^p + pz$, 因此 $|x|_K = |x - pz|_K = |y^p|_K = |y|_K^p$, 于是 $|x|_K < |y|_K < 1$. 由此可知 $\mathfrak{m}_K$ 不是一个主理想, 因此该赋值是非离散的.

例 2.8. 假设 K 是特征为 p 的完美胚域. 那么 (A1) 自动满足, (A2) 意味着 K 是完美的 (即每个元素都有一个 p 次根), (A3) 表示赋值是非平凡的. 因此, K 是一个特征为 p 的完备赋值的完美域.

例 2.9. 设 K 是剩余特征为 p 的完备赋值域. 假设 K 中的任何元素都有一个 p 次根 (特别地, K 是代数闭的), 则 K 是完美胚域.

例 2.10. 设 K 是 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ 的 p-进完成, 其整环为 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}]$ 的 p-进完备化. 这里 ζ_{p^n} 表示 p^n 次本原单位根. 注意到 K 是完美胚域. $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p(\zeta_{p^n})$ 上的 Frobenius 映射显然是满射的, 因此满足 (A2). 元素 $x = \zeta_p - 1$ 的赋值为 $|p|_K^{1/(p-1)}$, 这意味着 K 满足 (A3). 同样地, 若 K 是 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p(p^{1/p^n})$ 的 p-进完备化, 则 K 也是完美胚域.

我们接下来的目标是证明, 对于任何剩余特征为 p 的完美胚域 K, 其倾斜 $K^\flat$ 是特征为 p 的完美胚域.

命题 2.11. *设 K 是完美胚域. 则:*

(1) 对于 K 中的每个元素 x, 存在一个元素 $x' \in \mathcal{O}_K^\flat$, 满足 $x \equiv x'^\sharp \pmod p$.

(2) 对于 K 中的每个元素 y, 存在一个元素 $y' \in K^\flat$, 满足 $|y|_K = |y'|_{K^\flat}$.

证明. 根据定理2.2, 每个 $\mathcal{O}_K^\flat$ 中的元素 x 都可以被视为一个序列 $(x_0, x_1, \cdots)$, 其中 $x_n \in \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ 满足 $x_{n+1}^p = x_n$. 因此, 第一个断言可以从定义2.6的公理 (A2) 中推出.

下面证明第二个断言: 不失一般性, 我们可以假设 $y \neq 0$. 根据定义2.6的公理 (A3), 存在 $x \in \mathcal{O}_K$ 使得 $|p|_K < |x|_K < 1$. 任何与 x 在模 p 意义下同余的元素都有相同的赋值 $|x|_K$, 因此我们可以并且假设 $x = x'^\sharp$, 其中 $x' \in \mathcal{O}_K^\flat$. 现在, 我们可以通过乘以适当的 x 的幂, 将 y 修正为满足 $|p|_K < |y|_K < 1$ 的元素. 现在再次使用 (1), 可以选择 $y' \in K^\flat$, 满足 $y'^\sharp \equiv y \pmod p$, 因此 $|y|_K = |y'^\sharp|_K = |y'|_{K^\flat}$. □

注 2.12. 设 K 是剩余特征为 p 的完备赋值域, 满足前面定理中的两个断言. 很容易看出, (1) 意味着公理 (A2), (2) 意味着公理 (A3). 换句话说, 完美胚域的公理正是我们需要确保倾斜域 $K^\flat$ "足够大" 的条件.

现在我们将 $\mathcal{O}_K^\flat$ 的环结构扩展到 $K^\flat$ 上. 根据命题2.11, 我们可以找到一个元素 $\varpi \in K^\flat$, 满足 $0 < |\varpi|_{K^\flat} < 1$(称为伪均一化元). 那么对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, 我们有

$$\varpi^{-n}\mathcal{O}_K^\flat = \left\{x \in K^\flat : |x|_{K^\flat} \le |\varpi|_{K^\flat}^{-n}\right\}.$$

由此可以得到, 作为集合, 我们可以将 $K^\flat$ 等同于直接极限

$$\mathcal{O}_K^\flat \xrightarrow{\varpi} \mathcal{O}_K^\flat \xrightarrow{\varpi} \cdots,$$

其中转换映射由乘以 ϖ 给出. 因此, 包含映射 $\mathcal{O}_K^\flat \hookrightarrow K^\flat$ 诱导了一个乘法双射 $\mathcal{O}_K^\flat[\varpi^{-1}] \simeq K^\flat$. 因此, 我们可以将环结构扩展到 $K^\flat$ 上.

命题 2.13. *$K^\flat$ 上存在唯一的环结构, 它与其乘法相容, 并在 $\mathcal{O}_K^\flat$ 上与推论2.3的环结构相同.*

注 2.14. 注意到注2.4中的加法公式仍适用于 $K^\flat$. 设 $x = \{x_n\}_{n\ge0}$, $y = \{y_n\}_{n\ge0}$ 是 $K^\flat$ 中的两个元素, 其中对于每个 $n \in \mathbb{Z}$, $x_n, y_n \in K$, 则存在一个充分大的整数 $N \in \mathbb{Z}$, 满足 $\varpi^N x = \{a_n\}_{n\ge0}$ 和 $\varpi^N y = \{b_n\}_{n\ge0}$ 都属于 $\mathcal{O}_K^\flat$(即每个 $a_n, b_n \in \mathcal{O}_K^\flat$). 设 $z = \{z_n\}_{n\ge0}$ 是 x 和 y 的和, 取 $\varpi = \{\varpi_n\}_{n\ge0}$, 则

$$\begin{aligned} z_n &= \varpi_n^{-N}(\lim_{m\to\infty}(a_{n+m} + b_{n+m})^{p^m}) \\ &= \lim_{m\to\infty}(\frac{a_{n+m} + b_{n+m}}{\varpi_{n+m}^N})^{p^m} \\ &= \lim_{m\to\infty}(x_{n+m} + y_{n+m})^{p^m}. \end{aligned}$$

定理 2.15. *设 K 是一个完美胚域. 则 $K^\flat$ 是一个特征为 p 的完美胚域, 具有上述的环结构和 $|\cdot|_{K^\flat} : x \mapsto |x^\sharp|_K$ 作为其赋值.*

证明. 由于 $K^\flat$ 的乘法是逐项定义的, 而 K 是一个域, 因此 $K^\flat$ 也是一个域. 根据定理2.2, $\mathcal{O}_K^\flat$ 同构于 $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ 的若干个拓扑环的逆极限, 其中过渡映射由 Frobenius 给出. 由于 p 在 $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ 中为零, 因此它在 $\mathcal{O}_K^\flat$ 中也为零, 因此在 $K^\flat$ 中也为零. 这证明了 $K^\flat$ 的特征为 p. 此外, $K^\flat$ 是完美的 (perfect): 每个元素 $(x_0, x_1, x_2, \cdots) \in K^\flat$ 都有唯一的 p 次根, 即 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$.

我们声称 $|\ |_{K^\flat}$ 是 $K^\flat$ 上的非阿基米德绝对值. 由定义可得

$$|0|_{K^\flat}=0,\ |1|_{K^\flat}=1,\ |x\cdot y|_{K^\flat}=|x|_{K^\flat}\cdot|y|_{K^\flat}$$

只需要证明对于 $x=\{x_n\}_{n\geq 0}, y=\{y_n\}_{n\geq 0}\in K^\flat$, 我们有

$$|x+y|_{K^\flat}\leq\max(|x|_{K^\flat},|y|_{K^\flat}).$$

根据注2.14的公式, 只需要证明

$$|(x_m+y_m)^{p^m}|_K\leq\max(|x_m|^{p^m},|y_m|^{p^m}),$$

这可以轻松地从关于绝对值 $|\ |_K$ 的事实中推导出来. 由于 $|\cdot|_K$ 是一个赋值, 因此该赋值在 $K^\flat$ 上也是非平凡的 (non-trivial), 因为它与 K 上的绝对值取相同的值 (根据命题2.11).

我们将通过展示 $K^\flat$ 是完备的来完成证明. 如果 K 的特征为 p, 则 $\sharp: K\to K^\flat$ 给出了一个关于域的同构, 它与它们的赋值相容, 因此无需证明. 假设 K 的特征为 0. 根据命题2.11, 我们可以选择一个元素 $\varpi\in K^\flat$, 使得 $|\varpi|_{K^\flat}=|p|_K$. 为了证明 $K^\flat$ 是完备的, 我们希望证明环 $\mathcal{O}_K^\flat$ 是 ϖ-完备的: $K^\flat$ 同构于系统的逆极限

$$\cdots\to\mathcal{O}_K^\flat/(\varpi^{p^3})\to\mathcal{O}_K^\flat/(\varpi^{p^2})\to\mathcal{O}_K^\flat/(\varpi^{p})\to\mathcal{O}_K^\flat/(\varpi).$$

对于每个 $m\geq 0$, 考虑集合的映射

$$\mathcal{O}_K^\flat\to\mathcal{O}_K,(x=\{x_n\}_{n\geq 0})\mapsto(x_m=(x^{1/p^m})^\sharp),$$

它诱导一个环同态 $\mathcal{O}_K^\flat\to\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$, 通过 $u_m:\mathcal{O}_K^\flat/\varpi^{p^m}\mathcal{O}_K^\flat\to\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ 分解. 这些 $m\in\mathbb{Z}$ 的 u_m 适合于下面的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{O}_K^\flat/\varpi^{p^2}\mathcal{O}_K^\flat \arrow[r] \arrow[d, "u_2"] & \mathcal{O}_K^\flat/\varpi^{p}\mathcal{O}_K^\flat \arrow[r] \arrow[d, "u_1"] & \mathcal{O}_K^\flat/\varpi\mathcal{O}_K^\flat \arrow[d, "u_0"] \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K
\end{tikzcd}$$

其中下水平图表的逆极限就是 $\mathcal{O}_K^\flat$, 根据定理2.2得到. 因此, 只需证明对于每个 $m\in\mathbb{Z}$, u_m 都是同构. 由于 ϖ 可以选择为任何其赋值小于 1 的元素, 这可以化简为 $m=0$ 的情况, 即下面的引理. □

引理 2.16. 设 K 是一个完美胚域, $\varpi\in K^\flat$ 是一个非零元素, 满足 $|p|_K\leq|\varpi|_{K^\flat}<1$. 则

映射 $\sharp: K^\flat \to K$ 诱导了一个同构 $\mathcal{O}_K^\flat/\varpi\mathcal{O}_K^\flat \to \mathcal{O}_K/\varpi^\sharp\mathcal{O}_K$.

证明. 满性由命题2.11得到. 为了证明单性, 我们注意到, 如果 $x \in \mathcal{O}_K^\flat$ 具有性质 $x^\sharp \equiv 0 \pmod{\varpi}^\sharp$, 则 $|x|_{K^\flat} = |x^\sharp|_K \le |\varpi^\sharp|_K = |\varpi|_{K^\flat}$, 因此 x 在 $\mathcal{O}_K^\flat$ 中被 ϖ 整除. □

2.2 反倾斜

在本节中, 我们使用 Witt 向量环来分类特征 p 的完美胚域的所有反倾斜.

记号 2.17. 从现在开始, 我们让 $C^\flat$ 表示一个特征为 p 的完美胚域. 上标 $^\flat$ 表示该对象 "在特征 p 下存在", 但并不意味着 $C^\flat$ 是作为完美胚域 C 的倾斜体给出的. 我们想要理解 $C^\flat$ 的所有反倾斜. 我们还将整元素环及其极大理想分别表示为 $\mathcal{O}_C^\flat, \mathfrak{m}_C^\flat$.

定义 2.18. 设 $C^\flat$ 是一个特征为 p 的完美胚域. $C^\flat$ 的一个*逆倾斜*（*untilt*）是指一个二元组 (K,ι), 其中 K 是一个剩余特征为 p 的完美胚域, 并且 $\iota: K^\flat \simeq C^\flat$ 是一个 (连续的) 同构.

问题 2.19. *给定一个特征为 p 的完美胚 $C^\flat$, 我们想问如何分类它的所有逆倾斜.*

如果 (K,ι) 是 $C^\flat$ 的一个逆倾斜, 其中 K 的特征为 p, 则从前面的部分可以知道, $\sharp: K \simeq K^\flat$ 是一个同构, 因此特征为 p 的逆倾斜是唯一的, 仅依赖于 K 的同构类.

假设 K 是特征为 0 的完美胚. 从前面的部分, 我们看到给定一个连续同构 $\iota: C^\flat \simeq K^\flat$ 等价于给定一个赋值环的同构

$$\mathcal{O}_C^\flat \to \mathcal{O}_K^\flat = \varprojlim(\cdots \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K).$$

这诱导了一个同构 $\iota_0: \mathcal{O}_C^\flat/(\varpi) \simeq \mathcal{O}_K/(p)$, 其中 $\varpi \in \mathfrak{m}_C^\flat$, 即赋值满足 $0 < |\varpi|_{C^\flat} < 1$. 反之, 任何这样的同构 ι_0 都可以提升为一个赋值环的同构 $\mathcal{O}_C^\flat \simeq \mathcal{O}_K^\flat$, 因为 $\mathcal{O}_C^\flat$ 也同构于 $\mathcal{O}_C^\flat/(\varpi)$ 的逆向极限, 其中过渡映射由 Frobenius 给出. 因此, 为了分类 $C^\flat$ 的所有逆倾斜, 我们只需要分类特征为 0 的完美胚 K, 并配备一个同构 $\mathcal{O}_C^\flat/(\varpi) \simeq \mathcal{O}_K/(p)$.

对于一个逆倾斜 (K,ι), 我们滥用符号, 记 $\sharp: C^\flat \xrightarrow{\iota} K^\flat \xrightarrow{\sharp} K$. 需要注意的是, 这个映射一般来说不是满射, 但与满射只有一步之遥. 由于命题2.11, 对于每个 $x \in \mathcal{O}_K$, 存在一个元素 $c_0 \in C^\flat$, 使得 $x = c_0^\sharp + x_1 p$, 其中 $x_1 \in \mathcal{O}_K$, 我们对 x_1 重复这个过程, 得到 $x = c_0^\sharp + c_1^\sharp p + x_2 p^2$, 最终我们得到 $\{c_n\}_{n\ge 0}$, 满足

$$x = \sum_{n\ge 0} c_n^\sharp p^n.$$

左边的无限和是有意义的, 因为 $\mathcal{O}_K$ 是 p-进完备的.

注 2.20. 然而, 这样的表达式并不唯一. 例如, 假设 K 是代数闭域. 则任何元素 $x \in \mathcal{O}_K^\flat$ 都可以通过选择一组兼容的 x 的 p^n 次根来写成 $c_0^\sharp$ 的形式. 在特征 0 的情况下, 这样的根不是唯一的.

现在我们介绍 Witt 向量理论, 它可以用来描述这样的表达式, 而且不依赖于 K 的选择. 我们在这里省略详细的构造, 详见 [FO22].

记号 2.21. 设 R 是一个特征为 p 的完美环, 则可以将其与一个特征为 0 的环 $W(R)$ 关联起来, 其中有一个乘性映射 $[\bullet] : R \to W(R)$, 称为 Teichmuller 提升 (或 Teichmuller 映射), 它是满足以下条件的唯一确定的:

(1) 存在一个同构 $W(R)/pW(R) \simeq R$, 其中 $[\bullet]$ 是它的一个截面, 即复合映射 $W(R) \twoheadrightarrow W(R)/pW(R) \simeq R$ 将 $[x]$ 映射为 x.

(2) 环 $W(R)$ 是 p-扭零的并且 p-进完备的.

(3) 元素 $[x] \in W(R)$ 对于每个 $n \geq 0$ 都有一个 p^n 次根.

更精确地说, Witt 向量环 $W(R)$ 中的元素 x 可以写成 $x = (x_n)_{n\geq 0}$ 的形式, 其中 $x_n \in R$, 对于每个 $c \in R$, 映射 $[c] = (c, 0, 0, \cdots)$. 加法和乘法由 Witt 多项式来确定 (它们都不是逐项定义的). 对于每个 $x = (x_n)_{n\geq 0}$, 将 p 乘以 x 的形式为 $(0, x_0^p, x_1^p, \cdots)$. 我们总是假设我们的环 R 是完美的. 即使加法不是逐项定义的, 它仍然保证元素 $(x_n)_{n\geq 0} - (x_0, 0, 0, \cdots)$ 的第一个项是 0. 结合 R 是完美的这一事实 (即, R 中的每个元素 c 都有一个 p 次根), 任何 $x \in W(R)$ 都可以唯一地写成 $\sum_{n=0}^{\infty}[c_n]p^n$ 的形式, 其中 $c_n \in R$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

例 2.22. 设 $R = \mathbb{F}_p$ 是具有 p 个元素的有限域, 则 $W(R) \simeq \mathbb{Z}_p$. 此外, 如果 $R = \mathbb{F}_{p^n}$, 则 $W(R)$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上的 (唯一的) 非分歧 n 次扩张.

注 2.23. 设 R 是特征为 p 的完美环. 则 Witt 向量环 $W(R)$ 可以通过一个通用性质来刻画: 对于任意 p-完备环 A, 模 p 的约化诱导了一个双射

$$\mathrm{Hom}(W(R), A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R, A/pA).$$

注意到 Witt 向量的构造是函子性的, 即设 $\varphi : R_1 \to R_2$ 是环之间的一个态射, 则 φ 可以提升为一个态射 $W(\varphi) : W(R_1) \to W(R_2)$. 特别地, 对于每个 $\mathbb{F}_p$-代数 R, Witt 向量环 $W(R)$ 是一个 $\mathbb{Z}_p$-代数.

让我们回到我们感兴趣的情况. 设 $C^\flat$ 是特征为 p 的完美胚域, 我们记 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}} = W(\mathcal{O}_C^\flat)$ 为 $C^\flat$ 的 Witt 向量环. 由于上面的分析, $C^\flat$ 的任意一个逆倾斜都等价于一个赋

值环同构 $\mathcal{O}_C^\flat/(\varpi) \simeq \mathcal{O}_K/(p)$. 考虑 $\mathcal{O}_C^\flat \twoheadrightarrow \mathcal{O}_C^\flat/(\varpi) \simeq \mathcal{O}_K/(p)$, 由于 $\mathcal{O}_K$ 是 p-完备的, 通过 Witt 向量的通用性质, 可以将其提升为一个同态

$$\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_C^\flat) \to \mathcal{O}_K,$$

并且可以表示为以下公式

$$\theta(\sum_{n\geq 0}[c_n]p^n) = \sum_{n\geq 0} c^\sharp p^n.$$

因此, 很容易看出这个 θ 是满射的. 此外, 可以证明 $C^\flat$ 的任意一个逆倾斜都是 $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ 的商环, 其中以一个主理想为其核.

定义 2.24. 设 $\xi = \sum_{n=0}^\infty [c_n]p^n \in \mathbb{A}_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_C^\flat)$, 我们称 ξ 是突出元素（*distinguished element*）的, 如果 c_0 的赋值满足 $0 < |c_0|_{C^\flat} < 1$, 并且 c_1 的赋值满足 $|c_1|_{C^\flat} = 1$. 或者等价地, $\xi \in W(\mathcal{O}_C^\flat)$ 是突出元素, 当且仅当 $\xi = [c_0] + up$, 其中 $c_0 \in \mathfrak{m}_C^\flat$, u 是 $W(\mathcal{O}_C^\flat)$ 中的单位.

固定一个 $C^\flat$ 的逆倾斜 K, 我们声称对应的 θ 的核必须包含一个突出元素. 考虑下面的集合的交换图.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_C^\flat \arrow[r, two heads] \arrow[d, "{[\bullet]}"'] \arrow[dr, dashed, "\sharp"] & \mathcal{O}_C^\flat/(\varpi) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_K/(p) \\
\mathbb{A}_{\text{inf}} \arrow[r, two heads, "\theta"'] & \mathcal{O}_K \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

由于 K 是一个完美胚域, 对于每个 $x \in \mathcal{O}_K$, 存在一个元素 $x' \in \mathcal{O}_C^\flat$, 使得 $|x'^\sharp|_K = |x|_K$, 即 $x'^\sharp$ 是 x 的一个单位倍数. 特别地, 我们取 $x = p$, 并将 $\varpi \in \mathcal{O}_C^\flat$ 定义为 p 在 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中的 x'. 令 $\overline{u} = \frac{\varpi^\sharp}{p}$, 它是 $\mathcal{O}_K$ 中的一个单位. 注意, θ 沿着任意单位的原像是 $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ 中的一个单位 (也就是说, θ 是局部的). 这是因为任意 $x = \sum_{n=0}^\infty [c_n]p^n \in \mathbb{A}_{\text{inf}}$ 是一个单位, 当且仅当 $|c_0|_{C^\flat} = 1$, 当且仅当 $\theta(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n^\sharp p^n$ 是 $\mathcal{O}_K$ 中的一个单位. 现在, 我们通过取 $\xi = [\varpi] - up \in \ker(\theta) \subseteq \mathbb{A}_{\text{inf}}$ 来证明这个命题, 其中 u 是 $\overline{u}$ 在 θ 下的任意一个原像.

例 2.25. 特征为 p 的逆倾斜 (在同构意义下唯一) 可以被识别为通过一个突出元素 $\xi = p$ 的商环 $\mathbb{A}_{\text{inf}}/(\xi)$.

定理 2.26. *以下两个集合之间存在一一对应关系:*

$$\Big\{\text{在 } \mathbb{A}_{\text{inf}} \text{ 中的突出元素}\Big\} \simeq \Big\{C^\flat \text{ 的逆倾斜}\Big\},$$

以及

$$\Big\{\text{在 } \mathbb{A}_{\text{inf}} \text{ 中的突出元素}\Big\}/\text{乘以单位} \simeq \Big\{C^\flat\text{的逆倾斜}\Big\}/\text{同构}.$$

引理 2.27. 设 $C^\flat$ 是特征为 p 的完美胚域, $\xi = [\varpi] - up$ 是 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 中的一个突出元素. 那么 $K = (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}/(\xi))[\frac{1}{p}]$ 可以被识别为 $C^\flat$ 的一个逆倾斜, 其中 $\mathcal{O}_K$ 被识别为 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}/(\xi)$, 并且有一个自然同态

$$\mathcal{O}_C^\flat/(\varpi) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}/(p, [\varpi]) = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}/(p, \xi) = \mathcal{O}_K/(p).$$

从引理2.27证明定理2.26 . 我们只需要证明每个逆倾斜 K 的核 $\ker(\theta)$ 是由一个可分元素 ξ 生成的 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 的一个主理想. 注意到 $\ker(\theta)$ 已经有了一个突出元素, 我们用 $\mathcal{O}_{K'} = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}/(\xi)$ 表示它, 而环 $\mathcal{O}_{K'}$ 也是一个逆倾斜 K' 的整元素环. 因此, 映射 θ 经由以下分解:

$$\mathbb{A}_{\mathrm{inf}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{K'} \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}_K.$$

由于 $\mathcal{O}_K$ 是一个整元素环, δ 的核是 $\mathcal{O}_{K'}$ 的一个素理想, 因此它只能是 (0) 或 $\mathfrak{m}_K$. 很容易看出这个核不可能是后者, 因为 $\mathcal{O}_K$ 的特征为 0. □

为了证明引理 2.27, 我们从一个关于 $*$-完备性的事实开始.

命题 2.28. 设 R 是一个包含两个元素 x 和 y 的交换环 (不一定是诺特环). 假设:

- 元素 x 在 R 中不是零因子, 并且 R 是 x-完备的, 即 $R \simeq \varprojlim R/(x^n)$.
- 元素 y 在 R/xR 中的像不是零因子, 并且 $R/(x)$ 是 y-完备的.

那么有以下结论成立:

- 元素 y 在 R 中不是零因子, 并且 R 是 y-完备的.
- 元素 x 在 $R/(y)$ 中的像不是零因子, 并且 $R/(y)$ 是 x-完备的.

证明. 首先, x 在 R 中不是零因子保证了 $R/(x^n) \simeq x^m R/(x^{m+n})$. 因此, y 在 $R/(x)$ 中不是零因子确实意味着 y 在 R 中不是零因子.

现在我们检查 x 在 $R/(y)$ 中的像是否是零因子. 假设不是, 那么存在 $x' \in R$ 使得 $xx' = yr \in yR$, 其中 $r \in R$. 对 x 取模, 我们有 $yr \equiv 0 \pmod{x}$, 这与 y 在 $R/(x)$ 中的像不是零因子相矛盾.

我们可以直接验证自然映射 $R/(y) \to \varprojlim_n R/(y, x^n)$ 是同构的, 也就是说 $R/(y)$ 是 x-完备的. 为了证明 R 是 x-完备的, 我们首先证明自然映射

$$R/(x^n) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k R/(x^n, y^k)$$

对于每个 $n \geq 1$ 都是同构的. 通过归纳, 当 $n=1$ 时, 这恰好是我们的第二个条件. 假设 $n<m$ 时该同构成立, 我们有以下交换图:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R/(x^{m-1}) \simeq xR/(x^m) & \longrightarrow & R/(x^m) & \longrightarrow & R/(x) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \\
0 & \to & \varprojlim_k R/(x^{m-1}, y^k) \simeq \varprojlim_k xR/(x^m, y^k) & \to & \varprojlim_k R/(x^m, y^k) & \to & \varprojlim_k R/(x, y^k) & \to & 0
\end{array}
$$

通过 5 引理, 我们证明了自然映射是同构的. 同样, 我们可以证明对于每个 $m \geq 1$, 以下同构式成立:

$$R/(y^m) \simeq \varprojlim_k R/(y^m, x^k)$$

因此, 我们有:

$$
\begin{aligned}
R &\simeq \varprojlim_n R/(x^n) \\
&\simeq \varprojlim_n (\varprojlim_m R/(x^n, y^m)) \\
&\simeq \varprojlim_m (\varprojlim_n R/(x^n, y^m)) \\
&\simeq \varprojlim_m (R/(y^m)).
\end{aligned}
$$

因此, R 是 y-完备的. □

引理 2.27的证明. 引理 2.27 的证明:

设 $\xi = [\varpi] - up$ 是 $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ 中的一个突出元素, 其中 $\varpi \in \mathfrak{m}_C^\flat$, u 是 $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ 中的一个单位. 如果 $\varpi = 0$, 则无需证明. 我们假设 $\varpi \neq 0$, 并记 $\mathcal{O}_K = \mathbb{A}_{\text{inf}}/\xi\mathbb{A}_{\text{inf}}$(这是有误导性的, 因为现在我们只知道 $\mathcal{O}_K$ 是一个环). 我们用 $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathcal{O}_K = \mathbb{A}_{\text{inf}}/\xi\mathbb{A}_{\text{inf}}$ 表示商映射, 并对于每个 $x \in \mathcal{O}_C^\flat$, 用 $x^\sharp$ 表示沿着复合映射 $\theta \circ [\bullet] : \mathcal{O}_C^\flat \to \mathbb{A}_{\text{inf}} \to \mathcal{O}_K$ 的像.

将上述命题应用于 $R = \mathbb{A}_{\text{inf}}$ 且 $x = p$, $y = \xi$ 的情况. 注意到由于 Witt 向量环的构造, 环 $\mathbb{A}_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_C^\flat)$ 是 p-扭元素自由的, 并且 p-完备的. 商 $\mathbb{A}_{\text{inf}}/p\mathbb{A}_{\text{inf}} \simeq \mathcal{O}_C^\flat$ 将 ξ 映射到 ϖ, 而 $\mathcal{O}_C^\flat$ 是 ϖ-完备和 ϖ-扭元素自由的. 现在我们得出以下事实:

- 环 $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ 是 ξ-完备的, 且 ξ 不是 $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ 中的零因子.
- 商环 $\mathcal{O}_K$ 是 p-完备的, 且 p 不是 $\mathcal{O}_K$ 中的零因子.

现在我们证明以下陈述:

(a) 对于任意 $x \in \mathcal{O}_K$, 存在一个元素 y 在 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中, 使得 $y^\sharp$ 是 x 的一个单位倍数.

如果 $x = p$, 我们可以取 $y = \varpi$. 由于 $\mathcal{O}_K$ 是 p-完备的, 我们可以假设 $x = p^n x'$, 其中 x' 不能被 p 整除. 不失一般性, 我们将 x 替换为 x', 因此假设 p 不能整除 x. 根据映射 $\sharp$ 的定义, 存在一个元素 $y \in \mathcal{O}_C^\flat$, 使得 $y^\sharp \equiv x \pmod p$. 这里 $y^\sharp$ 也不能被 p 整除. 由于 $\sharp$ 是乘性的, 可以推出 y 也不能被 ϖ 整除. 注意到 $\mathcal{O}_C^\flat$ 是一个赋值环, 因此我们可以假设 $\varpi = yy'$, 其中 $y' \in \mathfrak{m}_C^\flat$. 现在我们有

$$x = y^\sharp + w\varpi^\sharp = y^\sharp(1 + y'^\sharp w),$$

其中 $w \in \mathcal{O}_K$. 只需要证明 $1 + y'^\sharp w$ 是 $\mathcal{O}_K$ 中的一个单位. 注意到 $y' \in \mathfrak{m}_C^\flat$, 因此 y' 的某个幂可以在 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中被 ϖ 整除, 这意味着 $y^\sharp$ 的某个幂可以在 $\mathcal{O}_K$ 中被 p 整除. 由于 $\mathcal{O}_K$ 再次是 p-完备的, 元素 $1 - y'^\sharp w + (y'^\sharp w)^2 - (y'^\sharp w)^3 + \cdots$ 在 $\mathcal{O}_K$ 中收敛, 这个元素存在于 $1 + y'^\sharp w$ 的逆元.

(b) 设 x, x' 是 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中的元素, 满足 $x^\sharp$ 在 $\mathcal{O}_K$ 中可被 $x'^\sharp$ 整除. 那么 x 在 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中可被 x' 整除, 即 $|x|_{C^\flat} \le |x'|_{C^\flat}$.

假设不然, 即 $|x'|_{C^\flat} < |x|_{C^\flat}$. 那么我们有 $x' = tx$, 其中 $t \in \mathfrak{m}_C^\flat$. 由于 $x \neq 0$, 它被 ϖ^n 整除, 其中 n 是足够大的整数. 考虑它们在 $\sharp$ 下的像, 我们有 $x^\sharp$ 可以被 p^n 整除, 并且根据我们的条件, $x'^\sharp$ 也可以被 p^n 整除. 但是我们还有 $x'^\sharp = t^\sharp x^\sharp$, 因此 $t^\sharp$ 是 $\mathcal{O}_K$ 中的一个单位. 这与 $t \in \mathfrak{m}_C^\flat$ 矛盾, 因为 $t^\sharp$ 在 $\mathcal{O}_K/(p)$ 中的像是幂零元.

(c) 环 $\mathcal{O}_K$ 是一个整环.

我们可以通过 p-扭元素自由来证明这个结论. 设 y 是 $\mathcal{O}_K$ 中的一个元素. 根据 (a) 的结论, 我们可以假设 $x = y^\sharp$, 其中 $y \in \mathcal{O}_C^\flat$. 那么 x 能被 ϖ 的某个幂整除, 因此我们可以将问题缩小到 $x = \varpi^n$ 的情况, 其中 $n \geq 1$ 是一个整数. 注意到 $\varpi^\sharp$ 是 p 的一个单位倍数, 因此由 p-扭元素自由可知, ϖ 不是 $\mathcal{O}_K$ 中的零因子. 因此, ϖ^n 也不是 $\mathcal{O}_K$ 中的零因子. 这证明了 $\mathcal{O}_K$ 是一个整环.

现在我们定义 $\mathcal{O}_K$ 上的赋值. 对于每个 $y \in \mathcal{O}_K$, 我们定义 $|y|_K = |x|_{C^\flat}$, 其中 x 是 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中的一个元素, 满足 $y^\sharp$ 在 $\mathcal{O}_K$ 中是 x 的一个单位倍数. 陈述 (a) 和 (b) 保证了这个定义的良好性. 很容易看出以下等式:

$$|0|_K = 0, \ \ |1|_K = 1, \ \ |xy|_K = |x_K||y|_K.$$

由 (b) 可以看出, $|x_K| \geq |y_K|$ 当且仅当 x 能被 y 整除. 因此, 我们有

$$|x+y|_K \leq \max(|x_K|, |y_K|).$$

我们将赋值扩展到 $\mathcal{O}_K$ 的分式域 K, 然后可以很容易地检查 $\mathcal{O}_K$ 是 K 的赋值环.

注意到 $|p|_K = |\varpi|_{C^\flat} < 1$, 因此 K 的剩余特征是 p. 而且由于 p 不是 $\mathcal{O}_K$ 中的零因子, 所以 K 的特征是 0. $\mathcal{O}_K$ 是 p-完备的这一事实保证了 K 在这个赋值下是完备的. $\mathcal{O}_K$ 的极大理想 $\mathfrak{m}_K$ 不是由 p 生成的, 因为它包含像 $(\varpi^{1/p})^\sharp$ 这样的元素. 最后, 商环 $\mathcal{O}_K/(p)$ 同构于

$$\mathcal{O}_K/(p) \simeq \mathbb{A}_{\inf}/(p,\xi) = \mathbb{A}_{\inf}/(p,[\varpi]) = \mathcal{O}_C^\flat/(\varpi),$$

这保证了 Frobenius 在 $\mathcal{O}_K/(p)$ 上是满的. 因此, K 是一个完美胚域, 它是 $C^\flat$ 的逆倾斜. □

2.3 进制 Fargues-Fontaine 曲线

在本节中, 我们将注意力转向 Huber 的进制空间. 然后我们定义并讨论 Fargues-Fontaine 曲线的进制版本. 在 [Wei17] 中, 我们需要进制空间理论的原因有几个, 但在这里我们主要关心的问题是 Fargues-Fontaine 曲线无法存在于刚性解析几何的理论框架, 因为 $\mathbb{A}_{\inf}$ 不是一个仿解代数.

设 $C^\flat$ 是一个特征为 p 的完美胚域, $\varpi \in \mathfrak{m}_C^\flat$ 是一个伪均一化元. 事实上, 定理 2.26 建议我们应该将 $C^\flat$ 的逆倾斜的集合视为一个几何对象, 比如最大谱 $\mathrm{Spm}(\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}])$, 因为对于每个 $C^\flat$ 的逆倾斜 K, 相应的 θ_K 可以扩展为一个同态 $\theta_K : \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}] \to K$, 其中核是 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 的一个极大理想. 然而, 环 $\mathbb{A}_{\inf}$ 包含了它的拓扑信息 (与各种赋值有关), 如果我们只考虑它的 Zariski 谱, 这些信息将被忘记.

在 [Hub93, Hub94, Hub96] 中, Huber 发明了一个新的范畴, 即进制空间范畴, 它包含了形式概型范畴和刚性解析空间范畴作为它的子范畴. 在概型的语言中, 我们通过粘合一个交换环的素理想的 Zariski 谱来构造空间. 在进制空间的语言中, 我们用连续赋值在拓扑环上的等价类的进制谱来代替 Zariski 谱. 我们在附录 A 中简要回顾了这个概念.

在我们感兴趣的情况下, 固定 $C^\flat$ 是一个特征为 p 的完美胚域, $\varpi \in \mathfrak{m}_C^\flat$ 是 $C^\flat$ 的一个伪均一化元. 环 $\mathbb{A}_{\inf} = W(\mathcal{O}_C^\flat)$ 有两个收敛到 0 的 “方向”, 分别是 $(p^n)_{n\geq 0}$ 和 $([\varpi]^n)_{n\geq 0}$.

如果我们把 $\mathbb{A}_{\inf}$ 赋予 p-进拓扑 (即由理想 $I=(p)$ 定义), 我们将失去 $[\varpi]^n \to 0$ 这个信息. 因此, 我们取 $\mathbb{A}_{\inf}$ 本身作为定义环, (ϖ, p) 作为定义理想, 使得 $\mathbb{A}_{\inf}$ 成为一个 Huber 环. 我们取 $\mathbb{A}_{\inf}$ 本身作为整元素环, 并用 $\mathrm{Spa}\,\mathbb{A}_{\inf}$ 表示 Huber 对 $(\mathbb{A}_{\inf}, \mathbb{A}_{\inf})$ 的进

制谱.

定义 2.29. 我们定义 $\mathcal{Y} = (\mathrm{Spa}\ \mathbb{A}_{\mathrm{inf}})\backslash V(p[\varpi]) = \left\{x \in \mathrm{Spa}\ \mathbb{A}_{\mathrm{inf}} \;\middle|\; |[\varpi](x)| \neq 0, |p(x)| \neq 0\right\}$.

注 2.30. $\mathcal{Y} = \mathrm{Spa}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{[\varpi]}], \mathbb{A}_{\mathrm{inf}})$, 其中 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{[\varpi]}]$ 是一个 Huber 环, 带有定义环 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 和定义理想 $(p, [\varpi]) \subseteq \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$. 实际上, 一个赋值 $y \in \mathcal{Y}$ 可以扩展到 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{[\varpi]}]$.

仍然有疑问, 即 $\mathcal{Y}$ 是否真的是一个进制空间, 即结构预层 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ 是否是一个层. 然而, 这不是一个平凡的结果, 我们稍后会解释.

例 2.31. 作为集合, $\mathcal{Y}$ 是赋值 $x : \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p[\varpi]}] \to \Gamma_x$ 的集合, 使得对于每个 $f \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$, 赋值 $|f(x)| \leq 1$. 回顾每个 $C^\flat$ 的 untitled K 都将赋值环作为 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 除以一个特殊元素 ξ_K 的商, 因此每个 untitled 都与一个赋值相关

$$x : \mathbb{A}_{\mathrm{inf}} \twoheadrightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}/(\xi_K) \simeq \mathcal{O}_K \xrightarrow{|\cdot|_K} \mathbb{R}_{\geq 0},$$

其中 x 的支集是由 ξ_K 生成的理想定义的. 由先前的结果, 存在一个包含的集合映射

$$\left\{C^\flat \text{ 的逆倾斜}\right\} \hookrightarrow \mathcal{Y}.$$

我们将这个映射的像定义为 $|\mathcal{Y}|^{cl}$, 称为"经典 Tate 点". 之所以称其为"经典 Tate 点", 是因为 Tate 的刚性几何中只有由极大理想给出的点. 此外, 我们可以看到, 每个逆倾斜 K 都存在于相应点的"剩余域"中.

命题 2.32. 对于每个区间 $I = [a, b] \subseteq (0, \infty)$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, 考虑 $\mathcal{Y}$ 的有理子集

$$\mathcal{Y}_I := U\Big(\frac{\{p, [\varpi^a]\}}{[\varpi^a]}, \frac{\{p, [\varpi^b]\}}{p}\Big) = \Big\{|[\varpi^b]| \leq |p| \leq |[\varpi^a]|\Big\},$$

那么

$$\mathcal{Y} = \bigcup_I \mathcal{Y}_I \ \big(= \varinjlim_I \mathcal{Y}_I\big).$$

证明. 设 $y \in \mathcal{Y}$, 我们只需证明 $y \in \mathcal{Y}_I$ 对某个 $I = [a, b]$ 成立. 根据 $\mathcal{Y}$ 的定义, 我们有 $|p[\varpi](y)| \neq 0$. 由于 $[\varpi] \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 是拓扑幂零元素, 当 $b \to \infty$ 时, $|[\varpi]^b(y)| \to 0$. 由于 $|p(y)| \neq 0$, 存在足够大的 $b \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, 使得 $|[\varpi]^b(y)| \leq |p(y)|$. 类似地, 存在这样一个正有理数 $a \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, 使得 $|p(x)| \leq |[\varpi^a](x)|$. □

注 2.33. $\mathcal{Y}$ 的图像如下. 我们将 Spa $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 视为带有"坐标 p"的闭单位圆盘, 因此 $V(p)$ 出现为"原点", $V([\varpi])$ 出现为"边界". 区间 $\mathcal{Y}_I$, 其中 $I = (a, b)$, 是一个"半径为

$p^{-b} \leq r \leq p^{-a}$ 的闭环”，而 $\mathcal{Y}$ 是一个“去掉原点的开单位圆盘”．这里可能不太清楚，但我们将在下一章回到这个视角.

注 2.34. 显式地说，对于每个 $I=[a,b]$，$\mathcal{Y}_I$ 是某个 Huber 对 (B_I, B_I^+) 的仿射解析空间. 根据附录 A.2 中的 Huber 结果，B_I 是 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{[\varpi^b]}, \frac{1}{p}] = \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{[\varpi]}, \frac{1}{p}]$ 沿着基本邻域族 $\left((p,[\varpi])^n \mathbb{A}_{\inf}[\frac{p}{[\varpi^a]}, \frac{[\varpi^b]}{p}]\right)_{n\geq 0}$ 的拓扑下的完备化. 我们断言，这个拓扑就是 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{p}{[\varpi^a]}, \frac{[\varpi^b]}{p}]$ 中的 p-进拓扑. 确实，对于任意 $n \geq 0$，都有 $(p^n) \subseteq (p,[\varpi])^n$ 在 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{p}{[\varpi^a]}, \frac{[\varpi^b]}{p}]$ 中成立，对于每个 $N \geq a$，则有 $(p,[\varpi])^N \subseteq (p)$. 因此，我们有

$$B_I = \Big(\varprojlim_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{A}_{\inf}[\frac{p}{[\varpi^a]}, \frac{[\varpi^b]}{p}]/(p^n)\Big)[\frac{1}{p}].$$

而 B_I^+ 则是在 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{[\varpi]}, \frac{1}{p}]$ 中取整闭包后再在 B_I 中完备化得到的. 因此我们有

$$\mathcal{Y} = \varinjlim_I \mathcal{Y}_I = \varinjlim_I \mathrm{Spa}(B_I, B_I^+).$$

历史上，环 B_I 被早期发现，作为“关于变量 p 的类似于‘全纯函数’的对象”，而 Fargues 将这个公式作为 $\mathcal{Y}$ 的定义.

为了证明 $\mathcal{Y}$ 是一个进制空间，我们只需证明 $\mathcal{Y}_I = \mathrm{Spa}(B_I, B_I^+)$ 是一个仿射解析空间，这可以由 B_I 的代数性质推出. 在 [Far15] 中，Fargues 用了完美胚空间的技巧来证明这一点. 具体来说，他考虑了 $B_I \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \hat{L}$，其中 $\hat{L}$ 是一个完美胚域，是某个 profinite 算术域 L 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的完备化. 然后他声称这样的基变换保持了某些复形的正合性质，从而只需证明 $B_I \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \hat{L}$ 上的一个层的表述. Banach 环 $B_I \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \hat{L}$ 是一个完美胚环，并且这个层语句在 [Sch11] 中被证明了. 在 [KL15] 中，Kedlaya 和 Liu 再次证明了这个结果 (见定理 3.7.4 和 5.3.9). 但在这里，我们将遵循 Kedlaya 在 [Ked16] 中给出的另一种证明，其中他证明了环 B_I 是强 Noether 环.

定理 2.35. *对于每个 $I=[a,b]$，B_I 是强 Noether 环，因此 $\mathcal{Y}$ 是一个进制空间.*

现在我们讨论一下 $\mathcal{Y}$ 的点. 在例子 2.31 中，我们展示了 $C^\flat$ 的所有逆倾斜的集合 K(关于同构) 是 $\mathcal{Y}$ 的子集，且有非平凡的支集. 回忆一下，存在一个集合间的双射

$$\mathrm{Spv}\ A \longleftrightarrow \left\{ (\mathfrak{p}, [v]) \;\middle|\; x \in \mathrm{Spec}\ A,\ v \text{ 是在 } \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}) \text{ 的赋值} \right\}$$

其中 $[v]$ 表示 v 的等价类，Spv A 表示 A 上所有赋值 (不一定连续) 的等价类. 我们断言，对于某个 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中的分式理想 ξ，其支集为 (ξ) 的赋值 $v \in \mathcal{Y}$ 是等价类唯一的. 我们选择一个区间 $I=[a,b]$ 使得 $v \in \mathcal{Y}_I$，然后考虑以下交换图表

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p}, \frac{1}{[\varpi]}] \arrow[r, two heads, "\theta"] \arrow[d, "v"'] & K \arrow[dl, dashed, "\bar{v}"] \\ \Gamma_x & \end{tikzcd}$$

其中每个箭头都是连续的. 因此, 对于任意的 $x \in K$, x 在 K 中的赋值 $\bar{v}(x) < 1$ 当且仅当 x 是 K 中的拓扑幂零元素, 因此 $\bar{v}$ 的赋值环是 $\mathcal{O}_K$, 这也是 $|\cdot|_K$ 的赋值环. 根据我们在附录 A.1 中的讨论, 这等价于说 v 和 $|\cdot|_K$ 是等价的. 因此, 我们证明了以下命题:

命题 2.36. *定义在例子 2.31 中的子集 $|\mathcal{Y}|^{cl}$ 与支集为 $\xi\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$(其中 ξ 是突出元素) 的 $\mathcal{Y}$ 的子集一一对应.*

这个命题的陈述并不是那么令人满意. 回忆一下, 根据 Huber 的构造, 我们有

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}_I) = B_I,$$

并且由于我们假设 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ 是一个层, 因此 $\mathcal{Y}$ 上的全局截面可以写成

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) = \varprojlim_I \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}_I) = \varprojlim_I B_I =: B.$$

命题 2.37. *集合 $|\mathcal{Y}|^{cl}$ 可以等同于 $\mathrm{Cont}(B)$, 即连续赋值等价类*

$$|\cdot| : B \to \Gamma \cup \{0\}.$$

证明. 我们将在下一章中证明这个命题. □

我们又有以下定理 [FF18]:

定理 2.38. *对于上述每个区间 $I = [a, b] \subseteq (0, \infty)$, 环 B_I 都是一个 PID, 其极大谱等于 $|\mathcal{Y}_I|^{cl} = |\mathcal{Y}| \bigcap \mathcal{Y}_I$, 每个极大理想都可以由 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中的某个突出元素生成.*

现在我们可以定义进制 Fargues-Fontaine 曲线. 回忆到存在一个 Frobenius 映射, 它是一个 (连续的) 环自同构

$$\varphi : \mathcal{O}_C^\flat \to \mathcal{O}_C^\flat, \ x \mapsto x^p.$$

由于 Witt 向量环的构造是函子性的, 因此它提升到一个 (连续的) 环自同构, 我们也将其表示为

$$\varphi : \mathbb{A}_{\inf} \to \mathbb{A}_{\inf}.$$

具体地, $\mathbb{A}_{\inf} = W(\mathcal{O}_C^\flat)$ 中的元素是一个序列 $(x_0, x_1, x_2, \cdots)_{n \geq 0}$, 其中 $x_i \in \mathcal{O}_C^\flat$, 我们有以

下公式:

$$\varphi((x_0,x_1,\cdots)_{n\geq 0})=(x_0^p,x_1^p,x_2^p,\cdots)_{n\geq 0},\ p\cdot(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(0,x_0^p,x_1^p,x_2^p,\cdots)_{n\geq 0}.$$

因此, 如果我们将 $f=\sum_{n=0}^{\infty}[c_n]p^n\in\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 写成形式幂级数的形式, 那么 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 上的 Frobenius 映射可以写成

$$\varphi(\sum_{n=0}^{\infty}[c_n]p^n)=[c_0^p]+\varphi(\sum_{n=1}^{\infty}[c_n]p^n)=[c_0^p]+p\cdot\varphi(\sum_{n=1}^{\infty}[c_n]p^{n-1})=\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}[c_n^p]p^n.$$

这个 Frobenius 映射诱导了一个 Huber 对 $(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p},\frac{1}{[\varpi]}],\mathbb{A}_{\mathrm{inf}})$ 上的同构, 因此它也诱导了一个空间上的自同构

$$\varphi:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y},\ (v:\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p[\varpi]}]\to\Gamma_v)\mapsto(v\circ\varphi).$$

设 y 是 $\mathcal{Y}$ 的一个点, 则 $y\in\mathcal{Y}_{[a,b]}$ 当且仅当 $\varphi(y)\in\mathcal{Y}_{[\frac{a}{p},\frac{b}{p}]}$. 事实上, 这等价于以下条件:

(1) 不等式 $|[\varpi^b](y)|\leq|p(y)|\leq|[\varpi^a](y)|$ 成立.

(2) 赋值 $\varphi(y):\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\xrightarrow{\varphi}\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\xrightarrow{y}\Gamma_y$ 满足不等式 $|[\varpi^{\frac{b}{p}}](\varphi(y))|\leq|p(\varphi(y))|\leq|[\varpi^{\frac{a}{p}}](\varphi(y))|$.

此外, $\varphi_{[a,b]}:\mathcal{Y}_{[a,b]}\to\mathcal{Y}_{[a/p,b/p]}$ 是一个同构. 事实上, φ 将子环 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{p}{[\varpi^{a/p}]},\frac{[\varpi^{b/p}]}{p}]$ 映射到子环 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{p}{[\varpi^a]},\frac{[\varpi^b]}{p}]$, 这是一个自同构. 注意到由于 φ 是连续的, 因此在取完备化后, 它扩展到一个自同构 $\varphi:B_{[a/p,b/p]}\to B_{[a,b]}$. 因此, 它也定义了一个自同构 $\varphi:B\to B$, 其中 $B=\varprojlim_I B_I$. 考虑 $\varphi^{\mathbb{Z}}$-作用在 $\mathcal{Y}$ 上的表现, 对于任意 $r\in(0,\infty)$, 子集

$$\mathcal{Y}_{[r,pr)}=\Big\{|[\varpi^r]|\leq|p|<|[\varpi^{pr}]|\Big\}$$

是一个基本区域.

定义 2.39. 与 $\mathbb{Q}_p,C^\flat$ 相关的 进制 *Fargues-Fontaine* 曲线是商空间 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

注 2.40. 几何上的解释类似于紧黎曼曲面 $X=\mathbb{C}^\times/\lambda^{\mathbb{Z}}$, 其中 $\lambda^{\mathbb{Z}}$-作用由 $z\mapsto\lambda z$ 给出, 其中 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$.

注 2.41. 这个商空间 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}/\varphi^{\mathbb{Z}}$ 确实是一个进制空间, 因为每个点 $x\in\mathcal{X}$ 都有一个形如 $\mathrm{Spa}(B_I,B_I^+)$ 的有理邻域.

记投影为 $\pi:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$, $|\mathcal{X}|^{cl}$ 是 $|\mathcal{Y}|^{cl}$ 沿着 π 的像. 那么 $|\mathcal{X}|^{cl}$ 就是 $C^\flat$ 的逆倾斜的 "Frobenius 轨道" 集合. 假设 $y\in\mathcal{Y}$ 落在给定点 $x\in\mathcal{X}$ 上. 我们可以将 y 视为 $C^\flat$ 的一

个逆倾斜 (K,ι), 其中 K 是特征 0 的完美胚域, $\iota: K^\flat \xrightarrow{\sim} C^\flat$. 回忆到复合

$$\varphi \circ \iota : K^\flat \to C^\flat \xrightarrow{x \mapsto x^p} C^\flat$$

给出了另一个 un-tilt, 即 $\varphi(x) \in \mathcal{Y}$. 根据定理 2.38, 我们有以下推论:

推论 2.42. *存在一个自然的双射* $|\mathcal{X}|^{cl} \xrightarrow{\sim} \left\{C^\flat \text{ 的逆倾斜}\right\}/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

本节最后我们构造了一些 $\mathcal{X}$ 上的可逆层并定义了 Fargues-Fontaine 曲线的概形结构. 从 $\mathcal{Y}$ 上的层到 $\mathcal{X}$ 上的层的构造是通过下降来完成的. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{Y}$ 上的一个层. 那么, 当且仅当存在满足以下余链条件的同构 $\sigma_g : g^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ 时, $\mathcal{F}$ 同构于某个 $\mathcal{X}$ 上的层 $\mathcal{G}$ 的 π^*:

$$\begin{tikzcd}
(gh)^*\mathcal{F} = h^*g^*\mathcal{F} \arrow[r, "h^*\sigma_g"] \arrow[dr, "\sigma_{gh}"'] & h^*\mathcal{F} \arrow[d, "\sigma_h"] \\
& \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

在我们的情况下, 即 $\mathcal{Y}$ 上有一个 $\varphi^{\mathbb{Z}}$-作用, 其群商为 $\mathcal{X}$, 只需要定义同构 $\varphi^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 即可, 其余数据是唯一确定的.

现在考虑结构层 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$, 对于一个整数 $n \in \mathbb{Z}$, 我们定义一个同构 $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$, 将 $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(U) = \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\varphi(U))$ 中的 f 发送到 $p^{-n}\varphi^* f \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(U)$. 这是一个同构, 因为 p 在 $\mathcal{Y}$ 上总是可逆的. 我们将 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(n)$ 表示与整数 n 相关联的 (可逆) 层, 当 $n = 0$ 时, 我们得到结构层 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. 直接从定义可以得到:

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(n)) = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(n)) = B^{\varphi = p^n} := \left\{ f \in B \;\middle|\; \varphi(f) = p^n f \right\}.$$

很容易验证, $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=p^n}$ 是一个分次的 $\mathbb{Q}_p$-代数.

定义 2.43. 与 $\mathbb{Q}_p$ 和 $C^\flat$ 相关的 *Fargues-Fontaine* 曲线是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的概形, 定义为

$$X = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=p^n}.$$

2.4 任意局部域的情形

在本节中, 我们将 Fargues-Fontaine 曲线推广到任意局部域 E 上, 并解释为什么它是混合特征情况下带孔的开单位圆盘的类比.

如果一个离散赋值域的剩余域是有限的, 则称其为一个*局部域*. 分类定理告诉我们, 每个局部域都是 $\mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$ 或 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张. 在本节中, 我们固定一个局部域 E, 其剩余

域为 $\mathbb{F}_q$, 其中 $q = p^d$. 当 $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$ 时, 称为等特征情况, 当 $E/\mathbb{Q}_p$ 是有限扩张时, 称为混合特征情况.

例 2.44. 令 K 是特征为 0 的完美域, 取 $E = \mathbb{Q}_p$. 回忆我们构造了一个称为 K 的倾斜的特征为 p 的完备赋值域 $K^\flat$. 我们将其视为一个"函子", "函子" $W(-) : \mathcal{O}_K \to W(\mathcal{O}_K)$ 是 $(-)^\flat$ 的"左伴随函子": 对于另一个特征为 p 的完美域 C, 我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_K^\flat) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(W(\mathcal{O}_C), \mathcal{O}_K).$$

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_K^\flat) \xrightarrow[\sim]{\bmod \varpi} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_K^\flat/(\varpi)) \\ = & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_K/(p)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(W(\mathcal{O}_C), \mathcal{O}_K),\end{aligned}$$

其中 ϖ 是一个伪均一化元, $\mathcal{O}_K/(p) \simeq \mathcal{O}_K^\flat/(\varpi)$. 第一个同构成立是因为 C 是完美的, 对于每个 $c \in \mathcal{O}_C$, c^{1/p^n} 在 $\mathcal{O}_K^\flat/(\varpi)$ 中的像唯一地确定了 c 的提升. 第二个同构是显然的, 最后一个同构是由于 Witt 向量环的环的通用性质. 这些"函子"不是真正的函子, 因为我们没有定义它们来自哪个范畴以及它们去往哪个范畴.

无论如何, 我们将其推广到 E 是任意局部域的情况, 其剩余域为 $\mathbb{F}_q$. 我们希望定义一个称为分歧 *Witt* 向量的环 $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$, 满足以下通用性质: 对于上面提到的 $C/\mathbb{F}_q$ 和 K/E, 我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_K^\flat) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C), \mathcal{O}_K).$$

在等特征情况下, 其中 $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$, 我们可以很容易地看出 $W_{\mathcal{O}_E}(C) = C[\![\pi]\!]$. 在混合特征情况下, 上述论证仍然适用, 只需稍微修改 $W(\mathcal{O}_C)$.

引理 2.45. *设 E 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张, 其剩余域为 $\mathbb{F}_q$, 则*

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C) = W(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E,$$

其中 E_0 是 E 的最大无分歧扩张.

证明. 首先解释这个张量积的定义. 注意到包含映射 $\mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathcal{O}_C$ 提升为 $W(\mathbb{F}_q) \to W(\mathcal{O}_C)$. 由于给定次数的无分歧扩张是同构意义下唯一的, 我们可以通过映射 $\mathcal{O}_{E_0} \simeq W(\mathbb{F}_q) \to W(\mathcal{O}_C)$ 将 $W(\mathcal{O}_C)$ 视为 $\mathcal{O}_{E_0}$-代数. 因此这个张量积是有意义的.

只需定义以下双射即可:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_K/(p)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(W(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E, \mathcal{O}_K).$$

我们定义一个从左边到右边的映射. 设 $\varphi : \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_K/(p)$ 是一个 $\mathbb{F}_q$-态射. 由于 Witt 向量环的通用性质, 我们可以得到一个 $\mathbb{Z}_p$-态射 $\widetilde{\varphi} : W(\mathcal{O}_C) \to \mathcal{O}_K$. 由于 Witt 向量环的函子性, 它实际上是一个 $W(\mathbb{F}_q) \simeq \mathcal{O}_{E_0}$-态射. 然后我们基变换到 $\mathcal{O}_E$, 得到一个 $\mathcal{O}_E$-态射 $W(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_K$.

要定义逆映射, 设 $\psi : W(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_K$ 是一个 $\mathcal{O}_E$-态射. 考虑以下复合映射:

$$\mathcal{O}_C \xrightarrow{[\cdot]} W(\mathcal{O}_C) \hookrightarrow W(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K/(p).$$

这是一个环同态, 因为它通过 $\mathcal{O}_C \to W(\mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E/(p)$ 分解. 而且它是一个 $\mathbb{F}_q$-态射, 因为 ψ 是一个 $\mathcal{O}_E$-态射. 直接从定义可以看出, 它们互为逆映射. □

注 2.46. 在两种情况下, 都存在 Teichmuller 提升 $[\cdot] : \mathcal{O}_C \to W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$, 即在等特征情况下的包含映射 $C \hookrightarrow C[\![\pi]\!]$, 或者在混合特征情况下的 $c \mapsto [c] \otimes 1$. 请注意, $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$ 中的每个元素都可以唯一地写成

$$\sum_{n \geq 0} [c_n] \pi^n,$$

其中 $c_n \in \mathcal{O}_C$, π 是 E 的一组均一化元素.

就像 $E = \mathbb{Q}_p$ 的情况一样, 对于任意的 E, 我们在 $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$ 上赋予 $([\varpi], \pi)$-进拓扑, 其中 ϖ 是 C 的拟均一化元素, π 是 E 的一组均一化元素. 在这个拓扑下, $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$ 是一个 Huber 环.

定义 2.47. 我们定义 $\mathcal{Y}_{E,C} := \mathrm{Spa}\ W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C) - V([\varpi]\pi)$.

例 2.48. 在相同的特征下, $\mathcal{Y}_{E,C} = \mathrm{Spa}\ C[\![\pi]\!] - V([\varpi]\pi)$. 从集合意义上来看, 它是"截断的去心单位圆盘" $\mathbb{D}_C^* \subseteq \mathbb{A}_C$ 的进制版本, 因为对于每个满足 $0 < |t|_{\overline{C}} < 1$ 的非零元素 $t \in \overline{C}$, 通过商映射

$$|\cdot|_t : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C) = C[\![\pi]\!] \twoheadrightarrow C[\![\pi]\!]/(\pi - t) = C' \xrightarrow{|\cdot|_{C'}} \mathbb{R}_{\geq 0},$$

它在 $\mathcal{Y}_{E,C}$ 中给出一个点, 其中 C' 是 C 的有限扩张, 因此赋值 $|\cdot|_C$ 唯一地扩展为 C' 上的赋值 $|\cdot|_{C'}$. 可以轻松验证这是一个连续赋值, 满足 $|[\varpi]\pi|_t \neq 0$.

回到"混合特征"情形. 按照前一节的讨论, 对于 $I = [a, b] \subseteq (0, \infty)$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$,

考虑
$$\mathcal{Y}_{E,C}^{I}=U\Big(\frac{\{\pi,[\varpi^a]\}}{[\varpi^a]},\frac{\{\pi,[\varpi^b]\}}{\pi}\Big)=\Big\{|[\varpi^b]|\leq|\pi|\leq|[\varpi^a]|\Big\},$$
则有 $\mathcal{Y}_{E,C}=\varinjlim_I\mathcal{Y}_{E,C}^{I}$, 其中 I 遍历所有正的 $a,b\in\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. 我们记

$$B_{E,C}^{I}:=\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{E,C}}(\mathcal{Y}_{E,C}^{I})=\Big(\varprojlim_{n\in\mathbb{Z}_+}W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)[\frac{\pi}{[\varpi^a]},\frac{[\varpi^b]}{\pi}]/(\pi^n)\Big)[\frac{1}{\pi}],$$

(它也是 p-进完备化) 并有一个自然同构

$$\mathcal{Y}_{E,C}^{I}\simeq\mathrm{Spa}(B_{E,C}^{I},B_{E,C}^{I,+})$$

其中 $B_{E,C}^{I,+}$ 是 $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)[\frac{\pi}{[\varpi^a]},\frac{[\varpi^b]}{\pi}]$ 在 $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)[\frac{1}{[\varpi]},\frac{1}{\pi}]$ 中的整闭包的完备化. 同样地, 我们可以证明 $B_{E,C}^{I}$ 是强 Noether 环, 从而 $\mathcal{Y}_{E,C}$ 是一个仿紧空间, 我们记

$$B_{E,C}:=\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{E,C}}(\mathcal{Y}_{E,C})=\varprojlim B_{E,C}^{I}.$$

定义 2.49. $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$ 中的一个*突出元素*是指一个元素 $\xi=\sum_{i=0}^{\infty}[c_n]\pi^n\in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$, 满足 $0<|c_0|_C<1$ 且 $|c_1|_C=1$. 或者等价地, ξ 是显式的, 当且仅当 $\xi=[c_0]+u\pi$, 其中 $c_0\in\mathfrak{m}_C$, u 是 $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$ 中的单位.

将 p 替换为 π, 并重复引理2.27证明中的论证, 可以证明存在一个包含 E 的逆倾斜 C', 使得 C' 是由一个显式元素的商. 此外, 由于 $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)$ 的泛性质, 有一个双射

$$\Big\{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_C)\text{ 中的突出元素}\Big\}\simeq\Big\{\text{包含 }E\text{ 的 }C\text{ 的逆倾斜}\Big\},$$

因此我们定义*经典 Tate 点* $|\mathcal{Y}_{E,C}|^{cl}$ 为由三元组 (K,ι,u) 组成的集合, 其中 (K,ι) 是 C 的一个逆倾斜, $u:E\to K$ 是一个 $\mathbb{Q}_p$-态射. 然后有一个自然的包含映射 $|\mathcal{Y}_{E,C}|^{cl}\hookrightarrow|\mathcal{Y}_{E,C}|$, 由 K 上的赋值给出. 同样地, 定理2.38对于 $\mathcal{Y}_{E,C}^{I}$ 也成立, 即 $B_{E,C}^{I}$ 是一个 PID, 其最大谱等于 $|\mathcal{Y}_{E,C}^{I}|^{cl}$, 每个极大理想都由一些显式元素生成.

我们考虑在 $\mathcal{Y}_{E,C}$ 上, 将 φ 的作用 $x\mapsto x^p$ 替换为 φ^d 的作用, 其中 d 是 $E/\mathbb{Q}_p$ 的剩余指数, 因为 φ^d 在 E 上作用为恒等映射.

定义 2.50. 与 E,C 相关联的 *Fargues-Fontaine 曲线*是商空间 $\mathcal{X}_{E,C}=\mathcal{Y}_{E,C}/\varphi^{d\mathbb{Z}}$.

注 2.51. 设 $|\mathcal{X}_{E,C}^{I}|^{cl}$ 是投影的像, 则根据定义, 存在一个双射

$$|\mathcal{X}_{E,C}|^{cl}\xrightarrow{\sim}\Big\{\text{ 包含 }E\text{ 的 }C\text{ 的逆倾斜}\Big\}/\varphi^{d\mathbb{Z}}.$$

φ 在 $|\mathcal{X}_{E,C}|^{cl}$ 上的轨道有恰好 d 个元素. 此外, 假设 E 在 $\mathbb{Q}_p$ 上是非分歧的, 则 $E \simeq W(\mathbb{F}_q)[\frac{1}{p}]$. 如果 K 是 C 的一个逆倾斜, 则以下数据是等价的:

- $\mathbb{Q}_p$-态射 $u: E \to K$.
- $\mathbb{Z}_p$-态射 $u: W(\mathbb{F}_q) \to \mathcal{O}_K$.
- $\mathbb{F}_p$-态射 $\mathbb{F}_q \to \mathcal{O}_K/(p)$.
- $\mathbb{F}_p$-态射 $\mathbb{F}_q \to \mathcal{O}_C/(\pi)$, 其中 $\pi \in C$ 满足 $|\pi|_C = |p|_K$.
- $\mathbb{F}_p$-态射 $\mathbb{F}_q \to \mathcal{O}_C$(因为 $\mathbb{F}_q$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上是 étale 的).
- $\mathbb{F}_p$-态射 $\mathbb{F}_q \to C$.

因此, 我们得到一个双射 $|\mathcal{Y}_{E,C}|^{cl} \simeq |\mathcal{Y}|^{cl} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q, C)$, 其中 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\mathbb{Q}_p,C}$ 是我们在前面一节中定义的进制曲线. 由于 φ 在 C 上对 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q, C)$ 进行循环置换, 因此这个双射是 φ-等变的. 由此, 我们可以得到自然的双射

$$|\mathcal{X}_{E,C}|^{cl} \simeq (|\mathcal{Y}|^{cl} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q, C))/\varphi^{\mathbb{Z}} \simeq |\mathcal{Y}|^{cl}/\varphi^{d\mathbb{Z}}.$$

因此, $\mathcal{X}_{E,C}$ 可以被视为 $\mathcal{X}$ 的 Galois $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-覆盖.

注 2.52. $\mathcal{Y}_{E,C}$(*resp.* $\mathcal{X}_{E,C}$) 也可以表示为纤维积 $\mathcal{Y} \times_{\mathrm{Spa}\ \mathbb{Q}_p} \mathrm{Spa}\ E$(*resp.* $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spa}\ \mathbb{Q}_p} \mathrm{Spa}\ E$). 但是我们需要一些技术条件来确保纤维积在进制空间范畴中存在.

类似地, $\varphi^d \mapsto \pi^{-n}$ 在 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{E,C}}$ 上的数据可以下降到 $\mathcal{X}_{E,C}$ 上的一条线丛, 我们用 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{E,C}}(n)$ 表示它. 从定义可以直接得到

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{E,C}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{E,C}}(n)) = B_{E,C}^{\varphi^d=\pi^n} := \left\{ f \in B_{E,C} \;\middle|\; \varphi^d(f) = \pi^n f \right\}.$$

因此, $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B_{E,C}^{\varphi^d=\pi^n}$ 是一个分次 E-代数.

定义 2.53. 与 E 和 C 相关联的进制 *Fargues-Fontaine* 曲线是一个在 E 上定义的概形, 定义为

$$X_{E,C} = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B_{E,C}^{\varphi^d=\pi^n}.$$

记号 2.54. 如果没有歧义, 我们将用 X_E(*resp.* $B_E, B_E^I, \mathcal{Y}_E, \mathcal{Y}_E^I$) 表示 $X_{E,C}$(*resp.* $B_{E,C}, B_{E,C}^I, \mathcal{Y}_{E,C}, \mathcal{Y}_{E,C}^I$ 我们仍然像前一节中那样用 $B_I = B_{\mathbb{Q}_p,C}^I$(*resp.* $B = B_{\mathbb{Q}_p,C}$) 和 $\mathcal{Y}, \mathcal{X}, X$ 来表示.

命题 2.55. *(1) 存在一个自然同构*

$$B_E^I \simeq B_{eI} \otimes_{E_0} E,$$

对于每个 $I=[a,b]\subseteq(0,\infty)$, 其中 $a,b\in\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 且 $eI=[ea,eb]$, e 是分歧指数.

(2) 存在一个自然同构

$$B_E\simeq B\otimes_{E_0}E.$$

证明. 注意到 E/E_0 是完全分歧的, 因此 $E=E_0[\pi]\simeq E_0[x]/f$, 其中 π 是 E 的一个均一化元, f 是 π 的极小多项式, 是 Eisenstein 多项式. 根据定义, 存在一个自然的包含

$$W(\mathcal{O}_C)[\frac{p}{[\varpi^{ea}]},\frac{[\varpi^{eb}]}{p}]\hookrightarrow W(\mathcal{O}_C)[\frac{p}{[\varpi^{ea}]},\frac{[\varpi^{eb}]}{p}]\otimes_{\mathcal{O}_{E_0}}\mathcal{O}_E\hookrightarrow\big(W(\mathcal{O}_C)\otimes_{\mathcal{O}_{E_0}}\mathcal{O}_E\big)[\frac{\pi}{[\varpi^a]},\frac{[\varpi^b]}{\pi}]$$

它在 p-进完备化并可逆 p 后诱导了一个嵌入

$$B_{eI}\hookrightarrow B_E^I.$$

然后张量上 E 我们得到 $u_I:B_{eI}\otimes_{E_0}E\to B_E^I$, $b\otimes\pi^i\mapsto b\pi^i$. 显然它是单射的. 由于 u_I 的像是稠密的, 如果且仅如果 $B_{eI}\otimes_{E_0}E$ 是完备的, 它才是同构的, 因为 $B_{eI}\otimes_{E_0}E$ 是 B_{eI} 的有限扩张. 这证明了 (1).

当 I 变化时, 同构 u_I 是兼容的. 即对于 $I\subseteq I'$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc}B_{eI'}\otimes_{E_0}E & \xrightarrow{u_{I'}} & B_E^{I'}\\ \downarrow & & \downarrow\\ B_{eI}\otimes_{E_0}E & \xrightarrow[u_I]{} & B_E^I\end{array}$$

其中垂直映射是自然包含. 因此, 取极限我们有

$$B_E=\varprojlim_I B_E^I\simeq\varprojlim_I(B_{eI}\otimes_{E_0}E)\simeq\varprojlim_I(B_{eI}[x]/(f))=(\varprojlim_I B_{eI})[x]/f\simeq B\otimes_{E_0}E.$$

□

第三章 关于 p 的全纯函数

在本章中, 我们的主要目标之一是证明前一章中定义的环 B 是一个主理想整环. 为了得到这个结果, 我们需要一些关于 p 的 p-进复分析的工具. 我们仍然使用记号 2.54 中的符号.

3.1 B 作为 Banach 空间

我们可以将 B_I 理解为 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\pi]}]$ 的一些子环的代数极限, 从而得到 B. 但是, 我们也可以将 B 理解为 $\mathbb{A}_{\inf}$ 上的一族范数的完备化. 注意, 在本节中, 为了简单起见, 我们仅讨论 $E=\mathbb{Q}_p$ 的情况, 但所有的陈述都可以通过用 E 的一个分歧定则 π_E 替换 p 来推广到任意 E. 首先我们回顾一些拓扑代数学.

定义 3.1. 设 V 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的拓扑向量空间, 我们称 V 是一个 p-进 *Banach* 空间, 如果存在一个开的 $\mathbb{Z}_p$-子模 $V_0 \subseteq V$, 它在加法下闭合, 并且 V_0 作为 Abel 群在 p-进拓扑意义下是完备的, 并且满足 $V=V_0[\frac{1}{p}]$.

例 3.2. 固定一个 $\mathbb{Q}_p$ 上的非阿基米德范数 $|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$, 例如取 $|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ 使得 $|p|_{\mathbb{Q}_p}=\frac{1}{p}$. 设 V 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的向量空间. 我们定义 V 上的 *范数*为一个函数 $|\cdot|_V : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, 满足

$$|\lambda v|_V = |\lambda|_{\mathbb{Q}_p}|v|_V,\ |v+w|_V \leq \max(|v|_V, |w|_V),\ |v|_V = 0 \Rightarrow v=0.$$

这定义了 V 上的度量, 其中 $d(v,w)=|v-w|$. 如果 V 是关于这个度量空间中的分离完备空间, 则 V 是一个 p-进 Banach 空间, 其中我们取

$$V_0 = \big\{v \in V \big|\ |v|_V \leq 1\big\},$$

它被称为 V 的 *开单位球*. 相反地, 每个 p-进 Banach 空间都可以从这个构造中获得. 设 $V_0 \subseteq V$ 是一个开的 $\mathbb{Z}_p$-模, 它在 p-进拓扑意义下是完备的. 我们可以通过公式

$$|v|_V = \inf\big\{|\lambda|_{\mathbb{Q}_p} : v \in \lambda \cdot V_0\big\},$$

定义 V 上的范数, 其中 V_0 是它的开单位球.

例 3.3. 设 V 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的向量空间, 它有两个不同的范数 $|\cdot|_V$ 和 $|\cdot|'_V$. 我们定义 V 上的度量为以下公式

$$d(v,w) = |v-w|_V + |v-w|'_V.$$

如果 V 关于这个度量是完备的, 则 V 是一个 p-进 Banach 空间, 并且我们可以取 V_0 为

$$V_0 = \left\{v \in V \middle| \, |v|_V \leq 1 \text{ and } |v|'_V \leq 1\right\}.$$

例 3.4. 设 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的完备赋值域. 则 K 是一个 p-进 Banach 空间.

如果 V 是 $\mathbb{Q}_p$-向量空间, 则它关于它的范数的完备化可以被识别为 $\hat{V}_0[\frac{1}{p}]$, 其中

$$\hat{V}_0 := \varprojlim_n V_0/p^n V_0.$$

此外, 关于度量 $d(v,w) = |v-w|_V + |v-w|'_V$ 的完备化也可以被表示为 $\hat{V}_1[\frac{1}{p}]$, 其中 $V_1 = \left\{v \in V \middle| \, |v|_V \leq 1 \text{ and } |v|'_V \leq 1\right\}$.

现在让我们转向我们感兴趣的情况. 固定一个特征为 p 的完美胚域 $C^\flat$, 其估值环为 $\mathcal{O}_C^\flat$. 选取一个元素 $\varpi \in C^\flat$, 满足 $0 < |\varpi|_{C^\flat} < 1$, 并考虑局部化环 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$. 这个环的每个元素都有一个 Teichmuller 展开式

$$\sum_{n \gg -\infty} [c_n] p^n,$$

其中系数 $c_n \in C^\flat$ 是有界的. 利用这个展开式, 我们可以定义高斯范数:

定义 3.5 (高斯范数)**.** 固定一个实数 $0 < \rho < 1$. 对于 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 中的每个元素 $f = \sum_{n \gg -\infty} [c_n] p^n$, 我们定义

$$|f|_\rho = \sup\left\{|c_n|_{C^\flat} \rho^n\right\}.$$

注 3.6. 在我们的情况下, 这个定义是有意义的, 因为实数 $|c_n|_{C^\flat}$ 对于 $n \ll 0$ 消失, 并且随着 $n \to \infty$ 呈指数衰减. 此外, 上确界 $\sup\left\{|c_n|_{C^\flat} \rho^n\right\}$ 只需要有限个 n 的取值即可实现.

设 $y = (K, \iota) \in \mathcal{Y}$ 是一个点, 它同时也是 $C^\flat$ 的逆倾斜的同构类. 对于每个这样的点 y, 我们都有以下环同态

$$\theta_y : \mathbb{A}_{\inf} \to \mathcal{O}_K, \ \sum_{n \geq 0} [c_n] p^n \mapsto \sum_{n \geq 0} c_n^\sharp p^n,$$

它可以扩展为 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}] \to K$. 我们将 f 沿着这个同态的像记为 $f(y) \in K$.

注 3.7. 设 $y = (K, \iota)$ 是 $\mathcal{Y}$ 中的一个点, 设 $\rho = |p|_K$. 则对于 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 中的每个元素

$f = \sum_{n \gg -\infty} [c_n] p^n$, 我们有

$$|f(y)|_K = \Big| \sum_{n \gg \infty} c_n^\sharp p^n \Big|_K \le \sup \left\{ |c_n^\sharp|_K \cdot |p|_K^n \right\} = \sup \left\{ |c_n|_{C^\flat} \cdot |p|_K^n \right\} = |f|_\rho.$$

我们称 ρ 在 f 中是通用的, 如果上确界 $\sup\left\{|c_n|_{C^\flat}\rho^n\right\}$ 恰好被一个 n 实现. 也就是说, ρ 在 f 中是通用的, 如果存在一个整数 n, 使得 $|f|_\rho = |c_n|_{C^\flat}\rho^n$, 并且对于所有整数 $m \neq n$, 我们有 $|c_m|_{C^\flat}\rho^m < |f|_\rho$. 在这种情况下, 我们有 $|f|_\rho = |f(y)|_K$.

假设 ρ_0 在 f 中不是通用的, 则对于足够小的 $\epsilon \neq 0$, $(\rho_0 - \epsilon, \rho_0 + \epsilon) \backslash \{\rho_0\}$ 中的所有 ρ 都在 f 中是通用的. 这意味着集合

$$\left\{ \rho \in (0,1) \Big| \ \rho \text{ 在 } f \text{ 中不是通用的} \right\}$$

是稠密的.

命题 3.8. *对于每个 $0 < \rho < 1$, 映射 $|\cdot|_\rho : \mathbb{A}_{\inf} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个乘法范数 (在例子 3.2 的意义下), 并且与 $\mathbb{Q}_p$ 上的范数 $|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}$ 满足 $|p|_{\mathbb{Q}_p} = \rho$ 是相容的.*

证明. 首先我们证明 $|f+g|_\rho \le \max(|f|_\rho, |g|_\rho)$. 假设满足以下条件:

$(*)$ 实数 ρ 在 $f+g$ 中是通用的, 并且属于 $C^\flat$ 的赋值群.

在这种情况下, 我们可以选择一个点 $y = (K, \iota) \in \mathcal{Y}$ 满足 $|p|_K = \rho$(例如, 通过取 $\mathcal{O}_K = \mathbb{A}_{\inf}/([c] - p)$, 其中 $c \in C^\flat$ 是任意满足 $|c|_{C^\flat} = \rho$ 的元素). 因此我们有

$$|f+g|_\rho = |f(y) + g(y)|_K \le \max(|f(y)|_K, |g(y)|_K) \le \max(|f|_\rho, |g|_\rho).$$

因此, 该命题对于满足 $(*)$ 条件的实数 ρ 成立, 该条件在 $(0,1)$ 中是稠密的. 因此, 通过连续性, 我们有 $|f+g|_\rho \le \max(|f|_\rho, |g|_\rho)$ 对于所有 $\rho \in (0,1)$.

接下来, 对于每个 $f \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 和每个整数 n, 我们有 $|nf|_\rho \le |f|_\rho$. 通过连续性论证, 我们有 $|\lambda f|_\rho \le |f|_\rho$. 如果 $\lambda \in \mathbb{Z}_p^\times$, 则同样的论证给出 $|f|_\rho \le |\lambda f|_\rho$, 因此 $|f|_\rho = |\lambda f|_\rho$. 由于 $\mathbb{Q}_p^\times \simeq \mathbb{Z}_p^\times \times p^{\mathbb{Z}}$, 我们将情况缩小到检查 $|pf|_\rho = |p|_{\mathbb{Q}_p}|f|_\rho$, 这个式子可以通过定义得到证明.

如果 $|f|_\rho = 0$, 则由于平凡的原因有 $f = 0$. 我们通过证明对于每个 $f, g \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$, 都有 $|fg|_\rho = |f|_\rho \cdot |g|_\rho$ 来完成证明. 假设所有的 f, g 和 fg 都满足条件 $(*)$. 同样地, 我们可以选择一个点 $y = (K, \iota) \in \mathcal{Y}$ 满足 $|p|_K = \rho$, 然后我们有

$$|f \cdot g|_\rho = |(f \cdot g)(y)|_K = |f(y)|_K \cdot |g(y)|_K = |f|_\rho \cdot |g|_\rho.$$

同样地, 该命题在一个稠密子集上成立, 通过连续性, 我们有 $|fg|_\rho = |f|_\rho \cdot |g|_\rho$ 对于所有 $\rho \in (0,1)$. $\square$

命题 3.9. 假设 a 和 b 是 $C^\flat$ 的赋值映射的值域. 选取 $\varpi_a, \varpi_b \in C^\flat$ 使得 $|\varpi_a|_{C^\flat} = a$ 且 $|\varpi_b|_{C^\flat} = b$. 则单位球的交集

$$V_0 = \left\{ f \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}] \middle| |f|_a \leq 1, |f|_b \leq 1 \right\}$$

是子环 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{[\varpi_a]}{p}, \frac{p}{[\varpi_b]}]$.

证明. 我们已经证明了 V_0 是一个子环, 并且它包含 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{[\varpi]}{p}, \frac{p}{[\varpi]}]$. 假设 $f = \sum_{n \gg -\infty} [c_n] p^n$ 满足 $|f|_a \leq 1$ 和 $|f|_b \leq 1$, 其中 a 和 b 都是 $C^\flat$ 的赋值映射的值域. 根据假设, c_n 的绝对值有一个上界. 我们可以找到一个足够大的整数 m, 使得每个乘积 $\varpi_b^m c_n$ 都落在 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中. 因此我们有

$$f = (\sum_{n \leq m} [c_n] p^n) + (\sum_{n \geq 0} [c_{n+m} \varpi_b^m] p^m)(\frac{p}{[\varpi_b]})^m,$$

其中第二个和式是 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中的元素. 因此我们将问题约化到 Teichmuller 展开式是有限的情况. 假设 $|f|_a \leq 1$ 和 $|f|_b \leq 1$, 则对于每个整数 n, 我们有

$$|c_n|_{C^\flat} a^n \leq 1, \ |c_n|_{C^\flat} b^n \leq 1,$$

即 $c_n \varpi_a^n, c_n \varpi_b^n \in \mathcal{O}_C^\flat$. 当 $n \leq 0$ 时, 我们有 $[c_n]p^n = [c_n \varpi_a^n](\frac{[\varpi_a]}{p})^{-n} \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{[\varpi_a]}{p}]$; 当 $n \geq 0$ 时, 我们有 $[c_n]p^n = [c_n \varpi_b^n](\frac{p}{[\varpi_b]})^n \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{p}{[\varpi_b]}]$. $\square$

注 3.10. 我们也可以考虑有理子集

$$\mathcal{Y}_{a,b} = U\Big(\frac{\{p, [\varpi_a]\}}{[\varpi_a]}, \frac{\{p, [\varpi_b]\}}{p}\Big) = \Big\{ |[\varpi_b]| \leq |p| \leq |[\varpi_a]| \Big\}.$$

环 $B_{a,b} := \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}_{a,b})$ 被认为是 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 关于 $|\cdot|_a$ 和 $|\cdot|_b$ 两个赋值的完备化. 如果我们固定一个赋值 $|\cdot|_{C^\flat} = r$ 的伪均一化元素 ϖ, 并假设存在 $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使得 $|\varpi^u|_{C^\flat} = |\varpi_a|_{C^\flat}$ 和 $|\varpi^v|_{C^\flat} = |\varpi_b|_{C^\flat}$(例如, ϖ_a, ϖ_b 是 ϖ 的某个幂的 p^n-次方根), 则我们有

$$\mathcal{Y}_{a,b} = \Big\{ |[\varpi_b]| \leq |p| \leq |[\varpi_a]| \Big\} = \Big\{ |[\varpi^v]| \leq |p| \leq |[\varpi^u]| \Big\} = \mathcal{Y}_{[r^u, r^v]}.$$

注意, 设 $y = (K, \iota) \in \mathcal{Y}_{a,b}$, 则同态

$$\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}] \to K, \ f \mapsto f(y)$$

可以扩展为一个连续的环同态 $B_{a,b} \to K$, 我们也用 $f \mapsto f(y)$ 表示这个同态.

命题 3.11. 对于 $0 < a \leq c \leq b < 1$, 对于每个 $f \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$, 我们有 $|f|_c \leq \max(|f|_a, |f|_b)$.

证明. 直接根据定义得出. □

推论 3.12. 回忆 $B = \varprojlim B_{a,b}$, 则 B 是 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 关于所有高斯赋值 $\left\{|\cdot|_\rho\right\}_{\rho\in(0,1)}$ 的完备化.

注 3.13 (复解析的类比)**.** 设 f 是定义在 punctured unit disk $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{\times} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < 1\right\}$ 上的全纯函数. 那么 f 可以展开为 Laurent 级数形式

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n,$$

其中系数 c_n 是满足

$$\limsup_{n>0} |c_n|^{1/n} \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} |c_{-n}|^{1/n} = 0.$$

的复数. 反之, 对于任意满足这些条件的复数序列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 级数 $\sum c_n z^n$ 决定了 $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}^{\times}$ 上的一个全纯函数.

在我们的情况下, 假设我们有一个 Teichmulle 展开的形式和式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} [c_n] p^n,$$

其中每个 c_n 都是 $C^\flat$ 中的元素. 那么这个和式在 B 中收敛当且仅当它在每个 $\rho \in (0,1)$ 的高斯赋值下都收敛. 也就等价于说

$$\limsup_{n>0} |c_n|_{C^\flat}^{1/n} \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} |c_{-n}|_{C^\flat}^{1/n} = 0.$$

因此, 我们称环 B 为 p-进 "开 punctured unit disk" 上的 "全纯函数" 环. 事实上, 我们有以下表格:

完美胚几何	复分析
$\{C$ 的逆倾斜$\}/\sim$	开单位圆盘 $U=\{z\in\mathbb{C}\mid \lvert z\rvert<1\}$
素数 p	坐标函数 z
C 本身作为逆倾斜	原点 $z=0$
$\mathbb{A}_{\inf}$	幂级数 $\sum_{n\geq 0}c_nx^n$, 其中 $\lvert c_n\rvert\leq 1$
$\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{[\varpi]}]$	幂级数 $\sum_{n\geq 0}c_nx^n$, 其中 $\lvert c_n\rvert$ 有界
$\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$	洛朗级数 $\sum_{n\geq -k}c_nx^n$, 其中 $\lvert c_n\rvert$ 有界
B	复全纯函数 $\mathcal{O}(U\backslash\{0\})$

类似于复分析中允许本性奇点存在于全纯函数环中, 环 B 允许一些具有“在 $p=0$ 处本性奇点”的函数存在. 对于每个 $e\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$, 考虑形式和式

$$\log([e]):=\sum_{n>0}(-1)^{n+1}\frac{([e]-1)^n}{n}.$$

这个形式和式在每个 $\rho\in(0,1)$ 的高斯赋值下都收敛, 因为当 $n\to\infty$ 时, $\lvert([e]-1)^n\rvert_\rho$ 指数级下降, 而 $\lvert\frac{1}{n}\rvert_\rho$ 的增长远远不及它. 因此, 我们得到了一个在 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 中没有意义的元素 $\log([e])\in B$. 此外, 形式和式的定义自动满足对于 $e_1,e_2\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$, 我们有

$$\log([e_1e_2])=\log([e_1])+\log([e_2])$$

因此, 我们有 $\log([e])\in B^{\varphi=p}$, 这是因为以下等式成立:

$$\varphi_B(\log([e]))=\log(\varphi_{C^\flat}([e]))=\log([e^p])=p\log([e]),$$

其中第一个等式来自于 B 上的 Frobenius φ_B 的可加性和连续性. 需要注意的是, 这可以通过使用形式群的理论推广到任意局部域 E.

定义 3.14. 设 $f\in\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$, 则对于每个正实数 s, 我们通过公式

$$v_s(f)=-\log\lvert f\rvert_{\exp(-s)}$$

来定义 $v_s(f)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. 具体来说, 设 $f=\sum_{n\gg\infty}[c_n]p^n$ 是 Teichmuller 展开, 我们有

$$\lvert f\rvert_\rho=\sup\{\lvert c_n\rvert_{C^\flat}\rho^n\},\ v_s(f)=\inf\{v(c_n)+ns\}.$$

特别地, 当且仅当 $f=0$ 时, $v_s(f)=\infty$.

由于高斯赋值的性质, 我们有

$$v_s(fg)=v_s(f)+v_s(g),\ v_s(f+g)\geq \min(v_s(f),v_s(g)).$$

假设 f 是非零的, 并固定一个正实数 s, 则下确界 $v_s(f)$ 取自某个集合 $\{n_0<\cdots<n_k\}$ 中有限多个 n 的值. 因此, 对于足够小的 ϵ, 我们有

$$v_{s+\epsilon}(f)=v_s(f)+n_0\epsilon,\ v_{s-\epsilon}(f)=v_s(f)-n_k\epsilon.$$

这证明了以下命题:

命题 3.15. 设 $f\in\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 是一个非零元素. 则映射 $s\mapsto v_s(f)$ 决定了一个函数

$$v_\bullet(f):\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R},$$

它是分段线性的, 斜率为整数, 并且是凹的（即斜率是单调递减的）.

注 3.16. 设 f 是 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 中的一个非零元素. 上述命题表明, 该函数在每个点 $s\in\mathbb{R}_{>0}$ 处都有良定义的左导数和右导数, 我们用 $\partial_-v_s(f)$ 和 $\partial_+v_s(f)$ 来表示它们.

例 3.17. 设 ξ 是 $\mathbb{A}_{\inf}$ 的一个突出元素, 即 $\xi=\sum_{n\geq 0}[c_n]p^n$, 其中 $c_n\in\mathcal{O}_C^\flat$, 且 $|c_0|_{C^\flat}<1, |c_1|_{C^\flat}=1$. 那么我们有

$$v_s(\xi)=\min(v(c_0),s).$$

我们的目标是证明 $v_s(f)$ 可以扩展到 $B_{a,b}$ 的每个元素, 最终扩展到 B 的每个元素.

引理 3.18. 设 s 是正的实数, $f_1,f_2,\cdots\in\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 是对于 *Gauss* 赋值 $|\bullet|_{\exp(-s)}$ 的一个柯西序列, 且其不趋近于零. 则序列

$$v_s(f_i),\ \partial_-v_s(f_i),\ \partial_+v_s(f_i)$$

最终是常数序列.

证明. 设 $a=\lim\limits_{i\to\infty}v_s(f_i)$. 则存在一个整数 n, 使得对于所有 $n'>n$, 都有 $v_s(f_n-f_{n'})>a$, 进而有 $v_s(f_n)=a$. 由连续性, 对于任意 $n'>n$, 存在一个小区间 $I=(s-\epsilon,s+\epsilon)$, 使得 $v_t(f_{n'}-f_n)>v_t(f_n)$ 对 $t\in I$ 成立. 因此,

$$v_s(f_{n'})=v_s(f_n),\ \partial_-v_s(f_n)=\partial_-v_s(f_{n'}),\ \partial_+v_s(f_n)=\partial_+v_s(f_{n'}).$$

$\square$

引理 3.19. 对于 $0 < a < b < 1$, 设 $f_1, f_2, \cdots \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 是一个关于 *Gauss* 范数 $|\bullet|_a$ 和 $|\bullet|_b$ 的 *Cauchy* 序列, 且该序列不趋向于零. 则函数序列 $\{s \mapsto v_s(f_n)\}$ 在闭区间 $[-\log(b), -\log(a)]$ 上是趋于常数的.

证明. 不失一般性, 我们可以假设每个 f_i 都非零. 令 $s = -\log(b)$. 由于根据前一个引理, 我们可以假设 $v_s(f_i)$ 对于所有 i 都取相同的值 $r \in \mathbb{R}$ 且 $\partial_+ v_s(f_n)$ 对于所有 n 都取相同的值 $k \in \mathbb{Z}$. 由于对于所有 i, 函数 $v_\bullet(f_i)$ 都是凹的, 因此对于某个 i, 函数 $v_t(f_i)$ 在区间 $[-\log(b), -\log(a)]$ 上的上界为 $r' = \max(r, r + k\log(\frac{b}{a}))$. 选择足够大的 n, 使得对于所有 $n' > n$, 我们有 $|f_{n'} - f_n|_\rho < \exp(-r')$ 对于所有 ρ 成立, 等价于在 $[-\log(b), -\log(a)]$ 上有 $v_t(f_{n'} - f_n) > r'$. 然后我们有 $v_t(f_n) = v_t(f_{n'})$ 对于所有 $t \in [-\log(b), -\log(a)]$ 成立. $\square$

设 f 是 $B_{a,b}$ 中的一个元素. 存在一个序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, 其中 f_n 是 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 中的元素, 它们相对于 $\left\{|\bullet|_\rho\right\}_{\rho\in[a,b]}$ 的范数收敛于 f. 我们定义相对于 $s \in [a, b]$ 的 $v_s(f)$ 为 $v_s(f_i)$ 的极限. 注意, $v_s(f)$ 不依赖于 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 的选择. 我们证明了以下定理:

定理 3.20. 设 f 是 $B_{a,b}$ 中的一个元素. 则构造 $s \mapsto v_s(f)$ 是一条整斜率的分段线性函数, 并且它是凹的.

注 3.21. 函数 $s \mapsto v_s(f)$ 源自于复分析中的 Hadamard 三圆定理. 假设给定正实数 $a < b$, 并且让 $f : \left\{z \in \mathbb{C} \middle| \ a \leq |z| \leq b\right\} \to \mathbb{C}$ 是一致连续函数, 并且在圆环的内部是全纯的. 考虑函数

$$s \mapsto \sup_{|z|=e^s} |f(z)|,$$

Hadamard 三圆定理断言它在区间 $(-\log(b), -\log(a))$ 上是凸的.

推论 3.22. 环 $B_{a,b}$ 是整环.

证明. 设 f, g 是 $B_{a,b}$ 中的两个非零元素. 则 $s \mapsto v_s(f)$ 和 $s \mapsto v_s(g)$ 都是有上界的分段线性函数. 我们有 $v_s(fg) = v_s(f) + v_s(g) < \infty$ 对于所有 $s \in [a, b]$ 成立, 因此 fg 在 $B_{a,b}$ 中不为零. $\square$

推论 3.23. 假设 $C^\flat$ 是代数闭的. 设 $y = (K, \iota) \in \mathcal{Y}_{a,b}$ 是关于元素 $\xi \in \mathbb{A}_{\inf}$ 的逆倾斜. 如果 $g \in B_{a,b}$ 在点 y 处为零, 即 $g \in \ker(B_{a,b} \to K)$, 则 g 可被 ξ 整除 (唯一).

证明. 首先假设 g 属于环 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$. 那么我们可以写成 $g = \frac{g_0}{p^n[\varpi]^m}$, 其中 $g_0 \in \mathbb{A}_{\inf}$. 显然, $g \in \ker(B_{a,b} \to K)$ 等价于 $g_0 \in \ker(B_{a,b} \to K)$. 在前一章中, 我们看到 $\theta_K : \mathbb{A}_{\inf} \to K$ 的核由 ξ 生成. 因此存在 $h \in \mathbb{A}_{\inf}$ 使得 $g = h \cdot \xi$.

现在我们处理一般情况. 设 g 是 $B_{a,b}$ 中的元素, 它是序列 $g_1, g_2, \cdots \in \mathbb{A}_{\inf}$ 的极限. 由于我们假设 $C^\flat$ 是代数闭的, 映射 $\sharp : C^\flat \to K$ 是满射的. 因此, 我们可以写成 $g_i(y) = c_i^\sharp$, 其中 $c_i \in C^\flat \in K$(我们称 $g_i(y)$ 为 $B_{a,b} \to K$ 的像 g_i). 由于 $B_{a,b} \to K$ 的连续性, 序列 $g_i(y)$ 在 K 中收敛于零, 因此由 $|g_i(y)|_K = |c_i^\sharp|_K = |c_i|_{C^\flat}$ 可知 c_i 在 $C^\flat$ 中收敛于零. 此外, Teichmuller 提升 $\{[c_i]\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 在 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中收敛于零. 因此序列 $\{g_i - [c_i]\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 收敛于 g. 通过取代 g_i 为 $g_i - [c_i]$, 我们可以假设每个 g_i 满足 $g_i(y) = 0$. 由第一部分, 我们有 $g_i = h_i \cdot \xi$. 我们断言 h_i 收敛于 $B_{a,b}$ 中的元素 h, 然后由连续性得到 $g = h \cdot \xi$. 因此我们将通过证明 $\{h_i\}$ 相对于 $|\bullet|_a$ 和 $|\bullet|_b$ 是 Cauchy 序列来完成证明. 我们观察到对于每个 $0 < \rho < 1$, 都有

$$|g_i - g_j|_\rho = |\xi \cdot (h_i - h_j)| = |\xi|_\rho \cdot |h_i - h_j|_\rho,$$

因此我们有

$$|h_i - h_j|_\rho = \frac{|g_i - g_j|_\rho}{|\xi|_\rho} \to 0$$

当 $i, j \to \infty$ 时. 由于 $B_{a,b}$ 是整环, 因此 h 是唯一的. $\square$

我们通过给出一个“内在”的描述来结束本节, 描述 $\mathbb{A}_{\inf}$ 作为 B 的子环.

定理 3.24. *设 f 是 B 的一个非零元素. 下面的条件等价:*

1. *对于每个 $0 < \rho < 1$, 都有 $|f|_\rho \le 1$.*

2. *元素 f 属于 $\mathbb{A}_{\inf} \subseteq B$.*

有了这个定理, 我们立即得到以下推论:

推论 3.25. *设 f 是 B 的一个非零元素. 那么:*

- *元素 f 属于局部化 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p}]$ 当且仅当存在一个整数 n, 使得对于所有 $0 < \rho < 1$, 都有 $|f|_\rho \le \rho^n$.*

- *元素 f 属于局部化 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{[\pi]}]$ 当且仅当存在一个常数 $C > 0$, 使得对于所有 $0 < \rho < 1$, 都有 $|f|_\rho \le C$.*

- *元素 f 属于局部化 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\pi]}]$ 当且仅当存在一个常数 $C > 0$ 和一个整数 n, 使得对于所有 $0 < \rho < 1$, 都有 $|f|_\rho \le C\rho^n$.*

引理 3.26. *设 f 是 B 的一个元素. 假设存在一个整数 m, 使得对于所有 $0 < \rho < 1$, 都有 $|f|_\rho \le \rho^m$. 那么存在 $c \in \mathcal{O}_C^\flat$ 和 $g \in B$, 使得*

$$f = [c]p^m + g,$$

并且 g 满足 $|g|_\rho \leq \rho^{m+1}$.

证明. 将 f 替换为 $\frac{f}{p^m}$, 我们可以将情况简化为 $m=0$, 即对于每个满足 $|f|_\rho \leq 1$ 的 f, 存在 $c \in \mathcal{O}_C^\flat$ 和 $g \in B$ 使得

$$f = [c] + g$$

且 $|g|_\rho \leq \rho$. 设 $f_i \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]$ 是一个收敛于 f 的序列, 且 $f_i = \sum_{n \gg -\infty}^{\infty} [c_{n,i}]p^n$. 我们设 $f_i^+ = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n,i}]p^n$. 我们断言 f_i^+ 也收敛于 f. 为了证明这个断言, 我们只需要证明对于每个 $\rho \in (0,1)$ 都有

$$|f_i - f_i^+|_\rho \to 0, \text{当} i \to \infty,$$

取一个小正数 ϵ. 那么序列 $f_1, f_2, \cdots$ 关于范数 $|\cdot|_{\epsilon\cdot\rho}$ 收敛于 f, 因此对于足够大的 i（取决于 ϵ）, 我们有

$$|f_i|_{\epsilon\cdot\rho} = |f|_{\epsilon\cdot\rho} < 1,$$

因此我们有

$$\sup(|c_{n,i}|_{C^\flat}\epsilon^n\rho^n) < 1.$$

对于每个负的 n, 这意味着

$$|c_{n,i}|_{C^\flat}\rho^n < \epsilon^{-n} < \epsilon,$$

这意味着 $|f_i - f_i^+|_\rho \to 0$, 当 $i \to \infty$.

现在将 f_i 替换为 f_i^+, 我们可以假设存在一个序列 $f_i \in \mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{[\varpi]}]$, 它收敛于 f, 并且我们写成

$$f_i = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n,i}]p^n.$$

对于两个指标 i, j, $f_i - f_j$ 的 Teichmuller 展开形式为 $[c_{0,i} - c_{0,j}] +$ 高阶项. 因此根据定义, 我们有

$$|c_{0,i} - c_{0,j}|_{C^\flat} \leq |f_i - f_j|_\rho,$$

这意味着 $\{c_{0,i}\}$ 在 $C^\flat$ 中是一个 Cauchy 序列. 将该序列设为 $c \in C^\flat$ 的极限. 由于映射 $[\cdot] : C^\flat \to \mathbb{A}_{\inf}$ 是连续的（其中我们将 $\mathbb{A}_{\inf}$ 赋予 (p, ϖ)-拓扑）, 在 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中, 序列 $[c_{0,i}]$ 收敛于 $[c]$. 不等式 $|c_{0,i}|_{C^\flat} \leq |f_i|_\rho < 1$ 意味着 $c_{0,i} \in \mathcal{O}_C^\flat$, 因此 $c \in \mathcal{O}_C^\flat$. 现在设 $g_i = f_i - [c_{0,i}]$, $g = \lim_{i\to\infty} g_i$, 我们将通过证明对于每个 $\rho \in (0,1)$, g 满足 $|g|_\rho \leq \rho$ 来完成证明. 否则, 假设 $v_s(g) < s$. 注意每个 $v_s(g_i)$ 都有正整数斜率, 因此 $v_s(g)$ 也有正整数斜率. 画出 $v_s(g)$ 和

s 的图像, 可以找到 $s' \in (0,s)$, 使得 $v_{s'}(g)$ 是负数, 即 $|g|_{\exp(-\rho)} > 1$. 这与事实矛盾:

$$|g|_\rho = |f-[c]|_\rho \leq \sup(|f|_\rho, |c|_{C^\flat}) \leq 1.$$

□

定理 3.24 的证明. $2 \Rightarrow 1$ 是显然的, 现在我们证明它的逆命题. 设 f 是 B 中的元素, 对于每个 $\rho \in (0,1)$, 我们有 $|f|_\rho < 1$. 根据上面的引理, 存在 $f_1 \in B$ 使得 $|f_1|_\rho \leq \rho$, 并且 $f = [c_0] + f_1$, 其中 $c_0 \in \mathcal{O}_C^\flat$. 再次使用引理, 我们得到 $c_1 \in \mathcal{O}_C^\flat$ 和 f_2, 满足

$$f_1 = [c_1]p + f_2,$$

其中对于每个 $\rho \in (0,1)$, 我们有 $|f_2|_\rho \leq \rho^2$. 重复这个过程, 我们得到序列 $\{c_n\}$ 和 $\{f_n\}$. 因此, 我们有

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}[c_n]p^n \in \mathbb{A}_{\text{inf}}.$$

□

3.2 $B^{\varphi=p^n}$ 和除子

作为一个应用, 我们使用上一节中定义的构造 $v_\bullet(f)$ 来证明以下定理.

定理 3.27. *设 n 是一个负整数. 则 $B^{\varphi=p^n}=0$.*

证明. 首先, 对于任意的 $g \in B$, 我们有

$$|\varphi(g)|_{\rho^p} = |g|_\rho^p,\ |p^n g|_\rho = \rho^n |g|_\rho.$$

然后将其转化为 $v_\bullet(g)$ 的形式, 我们有

$$v_{ps}(\varphi(g)) = pv_s(g),\ v_s(p^n g) = ns + v_s(g).$$

现在假设 f 是 $B^{\varphi=p^n}=0$ 中的一个非平凡元素, 满足 $\varphi(f)=p^n f$, 其中 n 是一个负整数. 我们有

$$pv_{s/p}(f) = v_s(\varphi(f)) = v_s(p^n f) = ns + v_s(f).$$

接下来对两边进行右导数运算, 得到

$$\partial_+ v_{s/p}(f) = n + \partial_+ v_s(f).$$

这与 $v_\bullet(f)$ 是凸函数的事实矛盾. 因此, 我们证明了 $B^{\varphi=p^n}=0$, 证毕. $\square$

定理 3.28. 从 $\mathbb{Q}_p$ 到 $B^{\varphi=1}$ 的标准映射是一个同构.

引理 3.29. 设 f 是 $B^{\varphi=1}$ 中的一个非零元素. 则存在一个整数 n, 对于所有的 $0<\rho<1$ 都有 $|f|_\rho=\rho^n$.

证明. 对于每个 $\rho\in(0,1)$, 我们有

$$|f|_\rho^p=|\varphi(f)|_{\rho^p}=|f|_{\rho^p}.$$

这意味着恒等式 $pv_s(f)=v_{ps}(f)$, 对其两边求导可得

$$\partial_- v_s(f)=\partial_- v_{ps}(f).$$

这表明 $v_\bullet(f)$ 是一个线性函数, 即 $v_s(f)=r+ns$. 恒等式 $pv_s(f)=v_{ps}(f)$ 说明 $r=0$. 最后, $v_s(f)=ns$ 等价于 $|f|_\rho=\rho^n$. $\square$

定理 3.28 的证明. 设 f 是 $B^{\varphi=1}$ 中的非零元素. 结合上述引理和推论3.25, f 是 $\mathbb{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$ 中的非零元素, 即 f 具有唯一的 Teichmuller 展开式

$$f=\sum_{n\gg-\infty}^{\infty}[c_n]p^n,$$

其中每个 c_n 属于 $\mathcal{O}_C^\flat$. 由于 f 在 Frobenius 作用下不变, 因此

$$\sum_{n\gg-\infty}^{\infty}[c_n]p^n=f=\varphi(f)=\sum_{n\gg-\infty}^{\infty}[c_n^p]p^n,$$

这意味着 $c_n=c_n^p$. 这等价于说 $c_n\in\mathbb{F}_p$, 因此 $f\in W(\mathbb{F}_p)[\frac{1}{p}]=\mathbb{Q}_p$. $\square$

我们的下一个目标是理解 $n>0$ 时 $B^{\varphi=p^n}$ 的结构. 回忆一下, 我们定义了曲线为

$$X=\operatorname{Proj}\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B^{\varphi=p^n},$$

对于每个 $f\in B^{\varphi=p^n}$, 我们可以将其视为 X 上向量丛的一个截面, 并定义其关联的除子. 为了做到这一点, 我们需要确定在每个点上的消失点和消失次数. 对于每个非倾斜点 $y=(K,\iota)\in|\mathcal{Y}|$, 有一个自然的映射 $B\to K$ 由此点确定, 我们称 f 在 y 处消失, 如果 f 沿着这个映射的像是零. 为了定义消失次数的概念, 我们需要引入环 B_{dR}^+, 它是完备的局部环 $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Y},y}$.

定义 3.30. 设 $y=(K,\iota)$ 是 $C^\flat$ 的一个特征零非倾斜点, 因此我们有一个自然的满同态 $\theta:\mathbb{A}_{\inf}\twoheadrightarrow\mathcal{O}_K$, 它的核是一个主理想 (ξ), 我们定义 $B_{\mathrm{dR}}^+=B_{\mathrm{dR}}^+(y)$ 为如下逆极限

$$\cdots\to(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^3))[\frac{1}{p}]\twoheadrightarrow(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^2))[\frac{1}{p}]\twoheadrightarrow(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi))[\frac{1}{p}]\simeq K.$$

注 3.31. 环 B_{dR}^+ 确实取决于逆倾斜点的选择, 但不取决于理想 $\ker(\theta)$ 的生成元 ξ 的选择.

注 3.32. 通过一些简单的计算, 我们可以将 $(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{p}]$ 替换为 $(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{\varpi}]$. 如果我们考虑特征 p 的情况, 即 $\xi=p$ 的情况, 我们有 $B_{\mathrm{dR}}^+\simeq W(C^\flat)$.

命题 3.33. *环 B_{dR}^+ 是一个完备离散赋值环, 其均一化元是 ξ.*

证明. 为了证明此命题, 我们只需要证明以下三个命题:

(1) ξ 在 B_{dR}^+ 中的像不是零因子.

(2) 环 B_{dR}^+ 是 ξ-完备的, 即 $B_{\mathrm{dR}}^+\simeq\varprojlim_n B_{\mathrm{dR}}^+/(\xi^n)$.

(3) $B_{\mathrm{dR}}^+/(\xi)\simeq K$.

我们断言 $\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n)$ 是 $(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{p}]$ 的一个子环, 即 p 在每个 $\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n)$ 中不是零因子. 的确, 我们对 n 归纳证明. 当 $n=1$ 时成立. 假设 $py\in(\xi^n)\subseteq(\xi)$, 其中 n 是正整数, $y\in\mathbb{A}_{\inf}$. 由于 p 在 $\mathbb{A}_{\inf}/(\xi)$ 中不是零因子, 我们有 $y=\xi y'$, 其中 $y'\in\mathbb{A}_{\inf}$. 由于 ξ 在 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中不是零因子, 我们有 $py'\in(\xi^{n-1})$, 通过归纳假设即可得证. 因此, 对于每个 $x=\{x_n\}\in B_{\mathrm{dR}}^+$, 其中 $x_n\in(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{p}]$, 我们可以选择一个整数 $k(n)$, 使得 $p^{k(n)}x_n\in\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n)$.

(1) 的证明: 假设相反, 那么存在 $x=\{x_n\}\in B_{\mathrm{dR}}^+$, 使得 $x\xi=0$. 那么我们有对于每个 n, $p^{k(n)}x_n\xi=0$ 在 $\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n)$ 中成立. 由于 ξ 再次不是零因子, 我们有 $p^{k(n)}x_n\in\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^{n-1})$, 这意味着 $x_{n-1}=0$ 在 $\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^{n-1})$ 中成立. 由于 n 是任意的, 因此得出 $x=0$.

(2) 和 (3) 的证明: 我们只需要证明等式

$$B_{\mathrm{dR}}^+/(\xi^n)\simeq(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{p}].$$

等式是由定义显然成立. 为了证明其单射性, 我们只需要证明对于每个 $x\in B_{\mathrm{dR}}^+$, 如果它在 $(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{p}]$ 中的像为零, 则 x 可以在 B_{dR}^+ 中被 ξ^n 整除. 将 $x=\{x_m\}_{m\geq 0}$ 写成上面的形式, 其中 $p^{k(m)}x_m\in\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^m)$. 然后, $p^{k(m)}x_m$ 在 $\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n)$ 中的像为零, 因此我们可以对于所有 $m\geq n$, 写成 $p^{k(m)}x_m=\xi^m y_m$, 其中 $y_m\in\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^{n-m})$. 然后, 序列 $\{\frac{y_m}{p^{k(m)}}\}$

定义了我们所需的 B_{dR}^+ 中的元素. 由此可以得到 (3) 当 $n=1$ 时成立. 这就证明了该命题. □

注 3.34. 环 B_{dR}^+ 非规范同构于 $K[[\xi]]$.

定义 3.35. 我们定义 B_{dR} 为 B_{dR}^+ 的分式域, 即 $B_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{\xi}]$.

注意, 对于每个特征为零的逆倾斜 $y=(K,\iota)$, 我们都有一个自然的映射 $\mathbb{A}_{\inf}\to B_{\mathrm{dR}}^+$. 由于 $[\varpi]$ 和 p 在 B_{dR}^+ 中都是可逆的, 我们将此映射扩展到 $\mathbb{A}_{\inf}[\frac{1}{p[\varpi]}]\to B_{dR}^+$. 此外, 我们可以将其扩展到 $B_{a,b}$, 然后扩展到 B.

命题 3.36. *设 $0<a\le b<1$ 为实数, 满足 $a\le |p|_K\le b$. 则上述映射扩展为一个自然映射 $B_{a,b}\to B_{dR}^+$, 我们将其记为 $f\mapsto \widehat{f}_y$.*

证明. 不失一般性, 我们可以假设 $a=|p|_K=b$, 并因此选择 $C^\flat$ 的伪均一化元 ϖ, 使得 $|\varpi|_{C^\flat}=|p|_K$. 首先, 我们有诱导映射

$$\overline{e}_n:\mathbb{A}_{\inf}[\frac{[\varpi]}{p},\frac{p}{[\varpi]}]\to B_{\mathrm{dR}}^+/(\xi^n)\simeq(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{p}].$$

我们断言存在一个整数 $k(n)$, 使得 $\overline{e}_n$ 的像落在

$$p^{-k(n)}(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))\subseteq(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))[\frac{1}{p}],$$

然后通过 p-adic 完备化得到

$$e_n:B_{a,b}\to B_{\mathrm{dR}}^+/(\xi^n).$$

这是因为 $p^{-k(n)}(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n))$ 已经是 p-adic 完备的. 于是所有的 e_n 确定了一个映射 $B_{a,b}\to B_{\mathrm{dR}}^+$.

现在我们证明这个断言. 我们的假设 $|\varpi|_{C^\flat}=|p|_K$ 保证了 f 和 g 沿着映射 $B\to B_{\mathrm{dR}}^+/(\xi)\simeq K$ 的像都落在估值环 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中. 因此, 我们可以找到 $f',f'',g',g''\in\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n)$, 使得

$$f=f'+\frac{\xi}{p^c}f'',\ g=g'+\frac{\xi}{p^c}g'',$$

其中 c 是足够大的整数. 那么对于任何整数 m, 我们有

$$\begin{aligned} f^m &= (f' + \frac{\xi}{p^c} f'')^m \\ &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f'^{m-i} (\frac{\xi}{p^c} f'')^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i} f'^{m-i} (\frac{\xi}{p^c} f'')^i \\ &\in p^{-nc}(\mathbb{A}_{\inf}/(\xi^n)). \end{aligned}$$

对于 g 也是类似的. □

现在我们可以通过使用 B_{dR} 的赋值来定义零点阶数和除子.

定义 3.37. 设 f 是 $B_{a,b}$(其中 $0 < a < b < 1$ 或 B) 的元素. 我们定义在 $y = (K, \iota)$ 处的零点阶数 $\mathrm{ord}_y(f)$ 为 $\widehat{f}_y$ 在 B_{dR}^+ 中的赋值. 我们用

$$\mathrm{Div}_{a,b}(f) := \sum_{y \in |\mathcal{Y}_{a,b}|} \mathrm{ord}_y(f) \cdot y, \ \mathrm{Div}(f) := \sum_{y \in |\mathcal{Y}|} \mathrm{ord}_y(f) \cdot y,$$

来表示 f 在 $\mathcal{Y}_{a,b}$ 或 $\mathcal{Y}$ 上的除子, 其中 $\mathrm{Div}_{a,b}(f)$ 属于由所有逆倾斜 $y \in |\mathcal{Y}|$ 生成的自由阿贝尔群.

注 3.38. 我们稍后将展示 $\mathrm{Div}_{a,b}(f)$ 总是有限的和, 而 $\mathrm{Div}(f)$ 不一定是有限的.

例 3.39. 设 ξ 是 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中的一个突出元素, 则有两种情况:

1. 如果 ξ 是 p 的单位倍数, 则 ξ 在每个 $B_{dR}^+(y)$ 中的像都是可逆的, 因此 $\mathrm{Div}(\xi) = 0$.
2. 如果 ξ 不是 p 的单位倍数, 则存在唯一的逆倾斜 $y = (K, \iota)$, 使得 $\mathbb{A}_{\inf} \to \mathcal{O}_K$ 的核由 ξ 生成. 由此得到 $\mathrm{ord}_y(\xi) = 1$, 对于每个 $y' \neq y$, 都有 $\mathrm{ord}_{y'}(\xi) = 0$, 因此除子 $\mathrm{Div}(\xi) = y$.

在上一节中, 我们构造了一种生成 $B^{\varphi=p}$ 中元素的方式, 即对于每个 $\epsilon \in \mathfrak{m}_C^\flat$, 我们有对数

$$t = \log([\epsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{([\epsilon - 1])^n}{n} \in B^{\varphi=p}.$$

然而, 还有一种更自然的方法来构造 $B^{\varphi=p}$ 中的元素. 如果我们假设 $f \in B^{\varphi=p}$ 有 Teichmuller 展开式 $\sum_{n \gg -\infty} [c_n] p^n$, 则我们有

$$\varphi(f) = \varphi(\sum_{n \in \mathbb{Z}} [c_n] p^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [c_n]^p p^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [c_n] p^{n+1},$$

因此我们有 $c_n^p = c_{n-1}$ 对于所有 $n \in \mathbb{Z}$. 唯一可能的元素形式为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{[c]^{p^n}}{p^n}$, 其中 $c \in C^\flat$. 这些元素在 B 中收敛的充分必要条件是 c 满足 $0 < |c|_{C^\flat} < 1$, 即 $c \in \mathfrak{m}_C^\flat$. 事实上, 我们将展示这些方法产生了相同的元素.

引理 3.40. *设 $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ 是指数函数在 $\mathbb{Q}_p[[x]]$ 中的幂级数表示. 则我们有以下形式幂级数的恒等式:*

$$\exp(x) = \prod_{d>0} (\frac{1}{1-x^d})^{\frac{\mu(d)}{d}},$$

其中 μ 是莫比乌斯函数, 满足 $\mu(d) = (-1)^n$, 当 $d = p_1 \cdot p_n$ 为不同质数的乘积时, 否则 $\mu(d) = 0$.

证明. 对右侧取对数, 我们有

$$\begin{aligned}
\log(\prod_{d>0} (\frac{1}{1-x^d})^{\frac{\mu(d)}{d}}) &= \sum_{d>0} \log((\frac{1}{1-x^d})^{\frac{\mu(d)}{d}}) \\
&= \sum_{d>0} \frac{\mu(d)}{d} \log(\frac{1}{1-x^d}) \\
&= \sum_{d>0} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{d'>0} \frac{x^{dd'}}{d'} \\
&= \sum_{n>0} \frac{x^n}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \\
&= x.
\end{aligned}$$

最后一个等式来自于当 $n = 1$ 时, $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$, 否则为 0 的性质. □

在 p-进数域中, 指数函数的收敛性比在实数域中要弱得多. 然而, 我们可以对它进行一些修改.

定义 3.41. 固定一个素数 p, 我们定义 *Artin-Hasse* 指数函数 $E(x)$ 为幂级数

$$E(x) = \prod_{(d,p)=1} (\frac{1}{1-x^d})^{\frac{\mu(d)}{d}}.$$

注 3.42. 在 $\mathbb{Q}[[x]]$ 中再次取对数, 我们有

$$\begin{aligned}\log E(x) &= \sum_{(d,p)=1} \frac{\mu(d)}{d} \log(\frac{1}{1-x^d}) \\ &= \sum_{(d,p)=1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{d'>0} \frac{x^{dd'}}{d'} \\ &= \sum_{n>0} \frac{x^n}{n} \sum_{d|n,(d,p)=1} \mu(d) \\ &= x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots .\end{aligned}$$

因此, 我们有 $E(x) = \exp(x + \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \cdots)$.

根据定义, 可以验证 $E(x)$ 是一个幂级数, 其系数属于子环 $\mathbb{Z}_{(p)}$, 且 $E(x) = 1 + x +$ 高次项, 因此该构造将 $\mathfrak{m}_C^\flat$ 中的每个 c 映射到 $E(c)$, 定义了一个双射 $\mathfrak{m}_C^\flat \to 1 + \mathfrak{m}_C^\flat$.

定理 3.43. 设 $x \in \mathfrak{m}_C^\flat$, 则有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{[x^{p^n}]}{p^n} = \log([E(x)]).$$

证明. 回忆对于任意 $y \in \mathcal{O}_C^\flat$, Teichmuller 提升 $[y]$ 可以通过极限 $\lim_{k\to\infty} \tilde{y_k}^{p^k}$ 来计算, 其中 $\tilde{y_k}$ 是任意位于 $y^{p^{-k}}$ 上的 $W(\mathcal{O}_K)$ 中的元素. 特别地, 对于 $x \in \mathfrak{m}_C^\flat$, 我们有

$$[1-x] = \lim_{k\to\infty} (1 - [x^{p^{-k}}])^{p^k},$$

因此

$$\begin{aligned}\log(\frac{1}{[1-x]}) &= \lim_{k\to\infty} p^k \log(\frac{1}{1-[x^{p^{-k}}]}) \\ &= \lim_{k\to\infty} p^k \sum_{m>0} \frac{[x^{mp^{-k}}]}{m} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[1/p]_{>0}} \frac{[x^\alpha]}{\alpha}.\end{aligned}$$

现在我们写出

$$
\begin{aligned}
\log([E(x)]) &= \log([\prod_{(d,p)=1}(\frac{1}{1-x^d})^{\frac{\mu(d)}{d}}]) \\
&= \sum_{(d,p)=1}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[1/p]_{>0}}\mu(d)\frac{[a^{d\alpha}]}{d\alpha} \\
&= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}[1/p]_{>0}}\sum_{d}\mu(d)\frac{[a^{\beta}]}{\beta},
\end{aligned}
$$

其中在最后一个表达式中, 我们将 $\beta = p^n k$, 其中 $(p,k)=1$, 并且 d 取遍 k 的所有因子. 因此, 根据莫比乌斯函数的性质, 可以将上式写成

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{[a^{p^n}]}{p^n}.
$$

我们已经在形式级数的意义下验证了等式, 可以检查这些表达式在环 B 中是收敛的. $\square$

现在我们讨论形如 $\log([x])$ 的元素的除子, 其中 $x\in\mathfrak{m}_C^\flat$. 我们将证明 $\log([x])$ 仅在单个 Frobenius 轨道上具有简单零点, 即

$$
\mathrm{Div}(\log([x])) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi^n(y)
$$

对于某个 $y\in\mathcal{Y}$.

记号 3.44. 记 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ 为由 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ 的 p-进完备化得到的完美域. 我们将以下元素记为 $(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})^\flat$ 中的某个元素:

$$
\varepsilon = (1,\zeta_p,\zeta_{p^2},\zeta_{p^3},\cdots)\in(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})^\flat,
$$

其中 ζ_{p^n} 是一个原根, 满足 $\zeta_{p^n}^p=\zeta_{p^{n-1}}$. 根据定义, 我们有 $\varepsilon^\sharp = 1$, $(\varepsilon-1)^\sharp = \lim_{n\to\infty}(\zeta_{p^n}-1)^{p^n}\in p\mathcal{O}_{(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})^\flat}$. 因此, ε 是 $1+\mathfrak{m}_{(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})^\flat}$ 中的元素, 即其赋值为

$$
0<|\varepsilon-1|_{(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})^\flat}<1.
$$

设 (K,ι) 是 $C^\flat$ 的一个逆倾斜, 并且 $u:\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}\to K$ 是一个嵌入, 我们将诱导映射 $(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}})^\flat\to K^\flat\simeq C^\flat$ 记为 $f_{u,\iota}$.

定理 3.45. *映射 $(K,\iota,u)\mapsto f_{u,\iota}(\varepsilon)$ 在如下集合上诱导了一个双射 (仅在集合意义下):*

$$
\Big\{\text{装备有 }\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}\to K\text{ 的 }C^\flat\text{ 的逆倾斜}(K,\iota)\Big\}\simeq 1+\mathfrak{m}_C^\flat.
$$

证明. 现在固定 $1+\mathfrak{m}_C^\flat$ 中的一个元素 x, 我们需要证明存在唯一的 K, 带有一个嵌入 $u:\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}\to K$, 满足 $(x^{\frac{1}{p^n}})^\sharp=u(\zeta_{p^n})$. 因此, 元素 $(x^{\frac{1}{p}})^\sharp$ 是 K 中的一个原根, 即满足 $1+(x^{\frac{1}{p}})^\sharp+\cdots+((x^{\frac{1}{p}})^\sharp)^{p-1}=0$ 的元素. 考虑映射 $\theta:\mathbb{A}_{\inf}\to\mathcal{O}_K$, 它使得元素 $\xi=1+[x^{1/p}]+\cdots+[(x^{1/p})^{p-1}]$ 在 K 中被消为 0. 我们断言 ξ 是突出. 我们将 ξ 写成 $\xi=\sum_{n=0}^\infty[c_n]p^n$ 的形式. 由于 $x\equiv 1\pmod{\mathfrak{m}_C^\flat}$, 所以 ξ 在 $W(k)=W(\mathcal{O}_C^\flat/\mathfrak{m}_C^\flat)$ 中的像为 p, 因此 $c_0\in\mathfrak{m}_C^\flat$, 并且 $|c_1-1|_{C^\flat}<1$. 根据定理 2.26, 存在唯一的逆倾斜 K 使得 ξ 在 K 中被消为 0. 而且 $\{x^\sharp,(x^{1/p})^\sharp,(x^{1/p^2})^\sharp,\cdots,(x^{1/p^n})^\sharp,\cdots\}$ 确定了一个 p^n 次单位根的可兼容序列, 这相当于确定了一个嵌入 $u:\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}\to K$. 因此, 我们得到了由 (K,ι,u) 到 $f_{u,\iota}(\varepsilon)$ 的映射. 显然这个映射是单射, 因为 $f_{u,\iota}(\varepsilon)$ 唯一确定了 K 和 u. 我们只需要证明这个映射是满射, 即对于任意 x, 存在 (K,ι,u) 使得 $f_{u,\iota}(\varepsilon)=x$. 这恰好是上面的构造所证明的. 这样, 我们就建立了 (K,ι,u) 和 $f_{u,\iota}(\varepsilon)$ 之间的双射. □

如果 K 是 $C^\flat$ 的一个逆倾斜, 并且它具有一个嵌入 $u:\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}\to K$, 那么我们可以找到其他的逆倾斜: 即我们可以用 $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$ 给出的 $\zeta_{p^n}\mapsto\zeta_{p^n}^\alpha$ 的自同构预合成 f. 在上述对应关系下, $1+\mathfrak{m}_C^\flat$ 上的 $\mathbb{Z}_p^\times$-作用是由指数给出的.

推论 3.46. *存在一个自然的双射*

$$\left\{\text{包含 }\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}\text{ 的 }C^\flat\text{ 的逆倾斜}(K,\iota)\right\}\Big/\text{同构关系}\simeq(1+\mathfrak{m}_C^\flat)/\mathbb{Z}_p^\times.$$

此外, 如果我们考虑左侧的 Frobenius 作用 $(K,\iota)\mapsto(K,\iota\circ\varphi)$, 那么右侧的 $\varphi^{\mathbb{Z}}$-作用是由将 x 映射为 $x^{1/p}$ 给出的.

推论 3.47. *存在一个自然的双射*

$$\left\{\text{包含 }\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}\text{ 的 }C^\flat\text{ 的逆倾斜}(K,\iota)\right\}\Big/\varphi_{C^\flat}^{\mathbb{Z}}\simeq(1+\mathfrak{m}_C^\flat)/\mathbb{Q}_p^\times.$$

上述双射中的逆映射可以定义为 $\log([x])$ 的零点集. 设 x 是 $1+\mathfrak{m}_C^\flat$ 中的一个元素, 我们定义 $V(x)$ 为所有包含 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ 的逆倾斜 $y=(K,\iota)$ 的集合, 满足

$$\theta_y(\log([x]))=0,$$

或者等价地说, $\log(x^\sharp)=0$ 在 K 中成立. 为了证明它是一个逆映射, 我们需要以下引理.

引理 3.48. *设 K 是一个特征为零的域, 它关于一个非阿基米德绝对值完备且具有剩余特征 p. 构造 $y\mapsto\log(y)$ 诱导了一个双射*

$$\left\{y\in K\,\middle|\,|y-1|<|p|_K^{1/(p-1)}\right\}\xrightarrow{\sim}\left\{z\in K\,\middle|\,|z|<|p|_K^{1/(p-1)}\right\}.$$

证明. 由于 log 和 exp 是形式级数的逆运算, 我们只需要验证当 $z < |p|_K^{1/(p-1)}$ 时 $\exp(z)$ 的收敛性. 由于我们在非阿基米德域中工作, 因此收敛性等价于说 $\limsup_{n\to\infty} |\frac{z^n}{n!}| = 0$. 实际上, 对于每个 $z < |p|_K^{1/(p-1)}$, 我们有

$$\limsup_{n\to\infty} |\frac{z^n}{n!}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{z^{p^n}}{(p^n)!}| < \lim_{n\to\infty} |p|^{\frac{1}{p-1}(p^n - \sum_{k=0}^{k=n-1}(p-1)^{n-k}(k+1))} = 0.$$

□

注 3.49. 常数 $|p|_K^{1/(p-1)}$ 是最优的. 如果我们假设 K 有一个原始的 p 次单位根 ζ_p, 则有 $|\zeta_p - 1|_K = |p|_K^{1/(p-1)}$. 然而, 我们有

$$p\log(\zeta_p) = \log(\zeta_p^p) = \log(1) = 0,$$

因此 $\log(\zeta_p) = 0 = \log(1)$, 即对数映射不是单射.

定理 3.50. *推论 3.47 中的逆映射由 $x \mapsto V(x)$ 给出.*

证明. 令 x 是 $1 + \mathfrak{m}_C^\flat$ 中的元素. 首先, 如果我们假设 $\log(x^\sharp) = 0$ 在一个逆倾斜 (K, ι) 中成立, 那么对于每个整数 $n \in \mathbb{Z}$, $\log(x^\sharp)$ 在 $(K, \iota \circ \varphi^{\mathbb{Z}})$ 中也为零, 因为有以下关系

$$\log((x^{p^{-n}})^\sharp) = \log((x^\sharp)^{p^{-n}}) = p^{-n}\log(x^\sharp).$$

因此 $V(x)$ 确实是一些 Frobenius 轨道. 我们现在证明它是单个轨道. 对于任何逆倾斜 (K, ι), 元素 $X^\sharp$ 满足 $|(x^{p^n})^\sharp - 1| < |p|_K^{1/(p-1)}$ 对于某些 $n \gg 0$ 成立. 因此, 如果 $\log(x^\sharp) = 0$, 则 $\log((x^{p^n})^\sharp) = 0$, 从而由引理 3.48, $(x^{p^n})^\sharp = 1$. 我们选择 n 尽可能小, 使得 $(x^{p^{n-1}})^\sharp \neq 1$. 通过将 ι 与适当的 Frobenius $\varphi_{C^\flat}$ 幂的复合, 我们可以假设 $n = 0$: 也就是说, 我们有 $x^\sharp = 1$, 但 $(x^{1/p})^\sharp \neq 1$, 这样 (K, ι) 就是定理 3.45 证明中的元素 x 对应的逆倾斜. □

例 3.51. 设 x 是 $\mathfrak{m}_C^\flat$ 中的元素. 我们已知 $\log([x])$ 只在单个 Frobenius 轨道上为零. 现在我们证明它在此轨道上每个点的消失阶数为 1. 取来自消失轨迹的元素 $y = (K, \iota)$, 其对应的特殊元素为

$$\xi = 1 + [x^{1/p}] + \cdots + [x^{(p-1)/p}] = \frac{[x] - 1}{[x^{1/p}] - 1} \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}.$$

注意, $[x^{1/p}]$ 的像是原根 ζ_p, 因此 $\zeta_p - 1$ 在 K 中可逆, 因此 $[x^{1/p}] - 1$ 在 $B_{\mathrm{dR}}^+(y)$ 中可逆.

因此 $[x]-1$ 是 $B_{\mathrm{dR}}^+(y)$ 的一元生成元. 同余式

$$\log([x])=\sum_{k>0}\frac{(1)^{k+1}}{k}([x]-1)^k\equiv[x]-1\pmod{([x]-1)^2}$$

表明 $\mathrm{ord}_y(\log([x]))=1$. 对于轨道中的其他元素 y', 可以对某个适当的 $n\in\mathbb{Z}$ 使用相同的论证来证明 $\log([x^{p^n}])$ 的消失阶数为 1. 由于 p 是 B_{dR}^+ 中的单位, $\log([x^{p^n}])=p^n\log([x])$ 的阶数与 $\log([x])$ 相同. 因此我们有

$$\mathrm{Div}(\log([x]))=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi^n(y),$$

其中 y 可以取为轨道中的任何元素.

现在我们陈述两个定理, 它们将在下一节中证明.

定理 3.52. *设 $C^\flat$ 是特征 p 的代数闭完备域, 则 $C^\flat$ 的每个逆倾斜 K 都是代数闭的.*

定理 3.53. *设 $C^\flat$ 是特征 p 的代数闭完备域, 且 $0<a\leq b<1$. 则:*

1. *设 x 是 $B_{a,b}$ 的一个非零元素. 则对于每个 $y=(K,\iota)\in|\mathcal{Y}_{a,b}|$, 都有 $\mathrm{ord}_y(x)<\infty$. 此外, 仅有有限多个元素 $y\in|\mathcal{Y}_{a,b}|$ 满足 $\mathrm{ord}_y(x)\neq 0$.*

2. *设 x,y 是 $B_{a,b}$ 的非零元素. 则 x 能被 y 整除, 当且仅当 $\mathrm{ord}(x)\geq\mathrm{ord}(y)$, 或者等价地,*

$$\mathrm{Div}_{a,b}(x)\geq\mathrm{Div}_{a,b}(y).$$

推论 3.54. *假设 $C^\flat$ 是代数闭的. 则 $C^\flat$ 的每个逆倾斜 K 都来自于某个元素 $x\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$ 的 $\log([x])$ 的消失轨迹. 此外, $\mathbb{Q}_p$-向量空间的映射*

$$\rho:1+\mathfrak{m}_C^\flat\xrightarrow{\log(x^\sharp)}K$$

是满射, 其核由 x 生成.

注 3.55. 这里的 $1+\mathfrak{m}_C^\flat$ 是在乘法和指数 $\mathbb{Q}_p$-作用下的 $\mathbb{Q}_p$-向量空间.

证明. 根据定理 3.52, 我们有 K 是代数闭的, 因此它必须包含 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$. 第一个陈述立即来自定理 3.50. 为了证明第二个陈述, 我们只需要证明 ρ 是满射. 设 z 是 K 的一个元素. 由于 ρ 是 $\mathbb{Q}_p$-向量空间的映射, 我们可以假设 $|z|_K<|p|_K^{1/(p-1)}$(这里 $\exp(x)$ 是良好定义的), 通过乘以 p 的某个幂次使得成立. 由于 K 再次是代数闭的, 我们可以找到一个 p^n

次根的兼容序列, 即我们可以找到某个 $y \in C^\flat$, 使得 $y^\sharp = \exp(z)$. 我们有

$$|y^\sharp - 1|_K = |\exp(z) - 1| = |z|_K < 1,$$

因此我们有 $z = \log(y^\sharp)$. 这证明了 ρ 是满射的. ρ 的核, 根据定理 3.50, 由 $\log([x^\sharp])$ 生成. □

推论 3.56. 假设 $C^\flat$ 是代数闭的. 则映射

$$1 + \mathfrak{m}_C^\flat \xrightarrow{\log([x])} B^{\varphi=p}$$

是 $\mathbb{Q}_p$-向量空间的同构.

证明. 由上述推论可知, 单性直接得证, 因为 $\log([x])$ 在不同的 Frobenius 轨道上为零. 我们只需要证明每个 $f \in B^{\varphi=p}$ 都可以写成 $\log([x])$ 的形式, 其中 $x \in 1 + \mathfrak{m}_C^\flat$. 假设 $f \neq 0$, 否则我们取 $x = 1$. 我们断言 f 有非零除子, 即 $\mathrm{Div}(f) \neq 0$. 否则, 由定理3.53可知, f 在 B 中可逆, 并且存在一个非零元素 $f^{-1} \in B^{\varphi=p^{-1}}$. 这与定理**??**所述 $B^{\varphi=p^{-1}} = 0$ 矛盾.

由于 $\mathrm{Div}(f) \neq 0$, 我们选择一个满足 $\mathrm{ord}_K(f) \geq 1$ 的 $C^\flat$ 的逆倾斜 K. 由于 $\varphi(f) = pf$, 因此 f 在 K 的 Frobenius 轨道上为零, 即对于每个属于 Frobenius 轨道的 K', 都有 $\mathrm{ord}_{K'}(f) \geq 1$. 再次利用定理3.53, 设 x 是在逆倾斜 K 处为零的元素, 则不等式

$$\mathrm{Div}(\log([x])) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(K) \leq \mathrm{Div}(f)$$

推出 f 在 B 中被 $\log([x])$ 整除. 即, 我们可以将 f 写成 $f = g \cdot \log([x])$ 的形式, 其中 $g \in B$. 由于 f 和 $\log([x])$ 都属于 $B^{\varphi=p}$, 我们有 $g \in B^{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$. 然后, 我们在 $\mathbb{Q}_p$-向量空间 $1 + \mathfrak{m}_C^\flat$ 中用 $\mathbb{Q}_p$ 的标量积修改 x, 使得 $f = \log([x])$. □

注 3.57. 结合定理 3.43, 我们可以将每个 $f \in B^{\varphi=p}$ 写成下面的形式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{[a^{p^n}]}{p^n}.$$

定理 3.58. 对于 $n \geq 0$, 每个 $B^{\varphi=p^n}$ 的非零元素 f 都能因式分解为 $\lambda \log([\epsilon_1]) \cdots \log([\epsilon_n])$ 的形式, 其中 $\lambda \in \mathbb{Q}_p$, $\epsilon_i \in 1 + \mathfrak{m}_C^\flat$. 此乘积在重新排序和乘以 $\mathbb{Q}_p^\times$ 中的元素后是唯一确定的.

证明. 使用归纳法. 当 $n = 0$ 时, 无需证明. 我们假设 $n > 0$. 注意到 f 在 B 中不可逆,

否则 f^{-1} 是 $B^{\varphi=p^{-n}}$ 中的元素, 而 $B^{\varphi=p^{-n}}=0$. 因此 f 的除子不是平凡的. 类似上面的证明, 我们可以找到 $\epsilon_1\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$, 使得 $f=g\cdot\log([\epsilon_1])$, 其中 $g\in B^{\varphi=p^{n-1}}$. 根据我们的假设, 我们可以将 g 写成 $g=\lambda\log([\epsilon_2])\cdots\log([\epsilon_n])$ 的形式, 因此 f 可以被写成所需的乘积形式.

为了证明唯一性, 我们只需要证明对于 $1\neq\epsilon\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$, 元素 $\log([\epsilon])$ 是环 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B^{\varphi=p^n}$ 中的素元素. 也就是说, 对于 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B^{\varphi=p^n}$ 中的 f,g, 如果 $f\cdot g$ 可以被 $\log([\epsilon])$ 整除, 则 f 可以被 $\log([\epsilon])$ 整除, 或者 g 可以被 $\log([\epsilon])$ 整除. 由于 $\log([\epsilon])$ 是齐次的, 因此我们只需要证明当 f,g 是齐次时的情况. 设 K 是属于 $\log([\epsilon])$ 的零点集的逆倾斜. 那么 f 或 g 在 K 处为零, 不妨设 f 在 K 处为零. 由于 f 是 Frobenius 特征向量, 因此 f 在 K 的 Frobenius 轨道上为零. 根据定理3.53, f 可以被 $\log([\epsilon])$ 整除. □

注 3.59. 上述定理表明 P 是由 $P_1=B^{\varphi=p}$ 在 $P_0=\mathbb{Q}_p$ 上生成的.

设 P 表示分次环 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B^{\varphi=p^n}$. 回忆一下, Fargues-Fontaine 曲线 X 的定义是 $\operatorname{Proj}P$. X 的点是 P 的齐次素理想. 由于 B 是整环 (P 也是), 零理想是 P 的齐次素理想. 设 $\mathfrak{p}$ 是 P 的一个非零齐次素理想. 上述定理告诉我们, $\mathfrak{p}$ 包含一个形如 $\log([\epsilon])$ 的元素. 我们断言 $\mathfrak{p}$ 由 $\log([\epsilon])$ 生成, 因为 $\log([\epsilon])$ 是 P 的极大理想. 实际上, 对于一个零点集包含逆倾斜 K 的 $\log([\epsilon])$, 映射的复合

$$P\hookrightarrow B\xrightarrow{\theta_K}K$$

是满射的, 其核由 $\log([\epsilon])$ 生成. 这表明了由某个 $1\neq\epsilon\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$ 的生成的理想是极大的. 综上, X 有唯一的泛点和代表 $C^\flat$ 的逆倾斜的 Frobenius 轨道的闭点, 即我们证明了以下推论.

推论 3.60. *存在以下一一对应:*

$$\left\{C^\flat\text{ 的逆倾斜}\right\}/\varphi^{\mathbb{Z}}\simeq\left\{X\text{ 的闭点}\right\},$$

其中逆倾斜 K 被实现为对应点的剩余域.

推论 3.61. *Fargues-Fontaine 曲线 X 是 Dedekind 概形.*

证明. 根据定义, X 可以由开仿射子集 $D(f)=\operatorname{Spec}R$ 覆盖, 其中我们记 $R=(B[\frac{1}{f}])^{\varphi=1}$, $f\in P$. 使用上面的论证, 我们可以证明 R 的每个素理想都由形如 $\log([\epsilon])$ 的单个元素生成, 因此每个素理想都是有限生成的, 因此 R 是 Noetherian. 然后, 由于每个非零素理想都是极大的, 它具有 Krull 维度 1. 最后, 每个极大理想都由单个元素生成, 因此是正则的. 这些事实推出 R 是 Dedekind 的, 因此 X 也是 Dedekind 的. □

3.3 关于除子的定理和代数闭性

在本节中, 我们大致概述定理3.53和定理3.52的证明. 在推论3.23中, 我们展示了如果 $f \in B_{a,b}$ 在点 $y \in Y$ 处消失, 那么 f 可以被对应的显著元素 ξ_y 整除. 这为证明定理3.53 提供了一个策略. 设 f, g 是满足 $\mathrm{Div}_{a,b}(f) \leq \mathrm{Div}_{a,b}(g)$ 的两个的元素. 我们可以假设 $\mathrm{Div}_{a,b}(f)$ 不是平凡的, 并找到一个点 $y \in Y$, 使得 f 和 g 都能被 ξ_y 整除, 即 $f = \xi_y f_1$ 和 $g = \xi_y g_1$. 然后, 我们将情况简化为 f_1 和 g_1, 满足 $\mathrm{Div}_{a,b}(f_1) \leq \mathrm{Div}_{a,b}(g_1)$. 然后我们可以重复这个论证: 如果 $\mathrm{Div}_{a,b}(f_1) \neq 0$, 我们可以找到另一个在点 $y_2 \in Y_{a,b}$ 处消失的突出元素 ξ_2, 使得 $f_1 = \xi_2 \cdot f_2$ 且 $g_1 = \xi_2 \cdot g_2$. 继续这样进行, 我们得到满足以下条件的序列 $\{f_n\}$、$\{g_n\}$ 和 $\{\xi_n\}$:

$$f = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n \cdot f_n \quad g = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n \cdot g_n$$

为了证明定理 2, 我们必须证明以下内容:

$(1')$ 这个过程最终会停止: 也就是说, 我们最终会陷入 $\mathrm{Div}_{a,b}(f_n) = 0$ 的情况. 在这种情况下, 我们有 $\mathrm{Div}_{a,b}(f) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

$(2')$ 当这个过程停止时, 元素 f_n 是一个单位元 (因此自动地整除 g_n).

命题 3.62. *设 f 是 $B_{a,b}$ 中的非零元素, 令 $N = \partial_- v_\beta(f) - \partial_+ v_\alpha(f) \geq 0$. 那么上述概述的构造必定在 $\leq N$ 步内终止. 也就是说, f 不能被消失在点 $y_i \in Y_{a,b}$ 上的显著元素 ξ_i 的乘积 $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_{N+1}$ 整除.*

证明. 我们在前面看到, 如果 ξ 是 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ 中的一个显著元素, 那么函数 $s \mapsto v_s(\xi)$ 由以下公式给出:

$$v_s(\xi) = \begin{cases} s & \text{若} s \leq v(\xi) \\ v(\xi) & \text{其他情况.} \end{cases}$$

如果 ξ 消失的点属于 $Y_{a,b}$, 那么 $v(\xi)$ 属于区间 $[\beta, \alpha]$, 因此有

$$\partial_- v_\beta(\xi) = 1 \quad \partial_+ v_\alpha(\xi) = 0$$

特别地, 如果我们能够写成 $f=\xi_1\cdot\xi_2\cdots\xi_{N+1}\cdot f_{N+1}$, 那么我们有

$$\begin{aligned}
N&=\partial_-v_\beta(f)-\partial_+v_\alpha(f)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{N+1}\partial_-v_\beta\left(\xi_i\right)-\partial_+v_\alpha\left(\xi_i\right)\right)+\left(\partial_-v_\beta\left(f_{N+1}\right)-\partial_+v_\alpha\left(f_{N+1}\right)\right)\\
&\geq\left(\sum_{i=1}^{N+1}\partial_-v_\beta\left(\xi_i\right)-\partial_+v_\alpha\left(\xi_i\right)\right)\\
&=N+1
\end{aligned}$$

这产生了矛盾. □

我们将从以下定理推导出定理3.53:

定理 3.63. *设 f 是 $B_{a,b}$ 中的非零元素. 以下条件等价:*

(a) 元素 f 在 $B_{a,b}$ 中可逆.

(b) 整数 $N=\partial_-v_\beta(f)-\partial_+v_\alpha(f)$ 等于零 (特别地, 凹函数 $s\mapsto v_s(f)$ 在区间 $[\beta,\alpha]$ 上是线性的).

(c) 除子 $\mathrm{Div}_{a,b}(f)$ 等于零. 也就是说, 不存在点 $y\in Y_{a,b}$ 使得 $f(y)=0$.

注意, 推论 (b) ⇒ (c) 可从命题 6 得出. 推论 (a) ⇒ (b) 也是显然的: 如果 f 有一个逆元 $f^{-1}\in B_{a,b}$, 那么很容易看出

$$\partial_-v_\beta\left(f^{-1}\right)=-\partial_-v_\beta(f)\quad\partial_+v_\alpha\left(f^{-1}\right)=-\partial_+v_\alpha(f),$$

所以

$$N=\partial_-v_\beta(f)-\partial_+v_\alpha(f)=-\partial_-v_\beta\left(f^{-1}\right)+\partial_+v_\alpha\left(f^{-1}\right)\leq 0.$$

命题 3.64. *设 f 是 $B_{a,b}$ 中的非零元素. 如果 $\partial_-v_\beta(f)=\partial_+v_\alpha(f)$, 则 f 在 $B_{a,b}$ 中可逆.*

证明. 首先假设 f 属于环 $\mathbb{A}_{\inf}\left[\frac{1}{p},\frac{1}{[\pi]}\right]$, 因此具有唯一的 Teichmüller 展开式:

$$f=\sum_{n\gg-\infty}\left[c_n\right]p^n$$

其中实数 $\left|c_n\right|_{C^b}$ 有界. 在这种情况下, 函数 $s\mapsto v_s(f)$ 对所有 $s>0$ 由公式

$$v_s(f)=\inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(v\left(c_n\right)+ns\right)$$

给出. 等式 $\partial_- v_\beta(f)=\partial_+ v_\alpha(f)$ 等价于要求函数 $s\mapsto v_s(f)$ 在区间 $[\beta,\alpha]$ 的一个小邻域内是线性的, 并且与线性函数

$$s\mapsto v\left(c_{n_0}s\right)+n_0 s=v_s\left(\left[c_{n_0}\right]p^{n_0}\right)$$

在该邻域上相等；由此可知, 我们有

$$v\left(c_n\right)+ns>v\left(c_{n_0}\right)+n_0 s$$

对于 $n_0\neq n$ 和 $s\in[\beta,\alpha]$ 成立. 重新表述为绝对值的形式, 我们有

$$\left|c_{n_0}\right|_{C^\flat}\rho^{n_0}>\left|c_n\right|_{C^\flat}\rho^n$$

对于所有 $n\neq n_0$ 和 $\rho\in[a,b]$.

我们希望证明在这种情况下, 函数 f 是可逆的. 通过将 f 替换为商 $\frac{f}{[c_{n_0}]p^{n_0}}$, 我们可以将其化简为 $n_0=0$ 且 $[c_{n_0}]=1$ 的情况, 使得我们的不等式可以重写为

$$1>\left|c_n\right|_{C^\flat}\rho^n.$$

对于 $n\neq 0$ 和 $\rho\in[a,b]$, 取 $\epsilon=\sum_{n\neq 0}\left[c_n\right]p^n$, 我们有 $|\epsilon|_\rho=\sup\{|c_n|\rho^n\}_{n\neq 0}<1$. 因此, ϵ 在环 $B_{a,b}$ 中是拓扑幂零的, 因此 $f=1+\epsilon$ 的逆可以表示为收敛级数:

$$f^{-1}=(1+\epsilon)^{-1}=1-\epsilon+\epsilon^2-\epsilon^3+\cdots$$

这完成了当 f 属于 $\mathbb{A}_{\inf}\left[\frac{1}{p},\frac{1}{[\pi]}\right]$ 情况下的证明. 现在我们来处理一般情况. 设 f 是 $B_{a,b}$ 中的一个非零元素, 我们将其写为以下序列的极限:

$$f_1,f_2,f_3,\cdots\in\mathbb{A}_{\inf}\left[\frac{1}{p},\frac{1}{[\pi]}\right]$$

该序列对于 $\rho\in[a,b]$ 的 Gauss 范数 $|\bullet|_\rho$ 是 Cauchy 的. 之前我们证明了:

$$\partial_- v_\beta(f)=\partial_- v_\beta\left(f_n\right)\quad \partial_+ v_\alpha(f)=\partial_+ v_\alpha\left(f_n\right)$$

对于足够大的 n 成立. 通过取子序列, 我们可以假设对于所有 n 这些等式都成立. 在这种情况下, 我们的假设 $\partial_- v_\beta(f)=\partial_+ v_\alpha(f)$ 保证对于每个 n 也有 $\partial_- v_\beta\left(f_n\right)=\partial_+ v_\alpha\left(f_n\right)$. 根据我们之前证明的特殊情况, 这意味着每个 f_n 在视为完备环 $B_{a,b}$ 中的元

素时是可逆的. 让我们将逆元记为 f_n^{-1}. 对于每个 $\rho \in [a,b]$, 我们有:

$$\left|f_m^{-1} - f_n^{-1}\right|_\rho = \left|\frac{f_n - f_m}{f_m \cdot f_n}\right|_\rho = \frac{|f_n - f_m|_\rho}{|f_m|_\rho \cdot |f_n|_\rho}$$

当 m 和 n 趋于无穷大时, 这个表达式的分子趋于零 (因为序列 $\{f_n\}$ 对于 Gauss 范数 $|\bullet|_\rho$ 是 Cauchy 的), 而分母趋于 $|f|_\rho^2$. 因此, 量 $|f_m^{-1} - f_n^{-1}|_\rho$ 趋于零. 也就是说, $\{f_n^{-1}\}$ 对于每个 $\rho \in [a,b]$ 都是 Cauchy 序列, 因此收敛到 $B_{a,b}$ 中的一个元素 g. 根据连续性, 我们有 $f \cdot g = 1$, 因此 f 是可逆的, 正如所需. □

以上命题完成了 $(b) \Rightarrow (a)$. 现在只需要证明 $(c) \Rightarrow (b)$, 即如下定理.

定理 3.65 (根的存在性, 版本 1)**.** *假设 $C^\flat$ 是代数闭的. 设 f 是 $B_{[a,b]}$ 中的一个非零元素, 并且假设 $\partial_- v_\beta(f) \neq \partial_+ v_\alpha(f)$. 那么存在一个点 $y \in Y_{[a,b]}$ 使得 $f(y) = 0$.*

注意, 在版本 1 的情况下, 我们可以找到某个 $\rho \in [a,b]$, 使得对于 $s = -\log(\rho)$, $\partial_- v_s(f) \neq \partial_+ v_s(f)$. 为了证明定理 1 在 $Y_{a,b}$ 上有一个根, 我们只需要证明它在 $Y_{[\rho,\rho]}$ 上有一个根. 换句话说, 我们可以假设不失一般性地 $a = \rho = b$. 因此, 我们只需要证明定理 1 的以下特殊情况:

定理 3.66 (根的存在性, 版本 2)**.** *假设 $C^\flat$ 是代数闭的. 设 f 是 $B_{\rho,\rho}$ 中的一个非零元素, 并设 $s = -\log(\rho)$. 如果 $\partial_- v_s(f) > \partial_+ v_s(f)$, 那么 f 在某个点 $y \in Y_{\rho,\rho}$ 处取零值.*

由于定理3.23, 以上定理实际上等价于:

定理 3.67. *设 f 是 $B_{[\rho,\rho]}$ 中的一个非零元素. 那么 f 可以分解为*

$$f = g \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n,$$

其中每个 ξ_i 是 $\mathbb{A}_{\inf}$ 中的一个突出元素, 在某个点 $y_i \in Y_{\rho,\rho}$ 处取零值, 而 g 是 $B_{\rho,\rho}$ 中的一个可逆元素.

在这里我们无法完整地证明这个定理, 仅大致陈述其证明思路. 这里 f 能被视为一个 "解析" 函数, 而该定理即是寻找其零点. 我们的思路大致是通过找到一些 "代数" 函数收敛到 f, 并且这些函数的零点逐渐逼近 f 的零点.

具体而言, 我们记 $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$, 这里 0 代表特征为 p 的逆倾斜. 对于任意两点 $x, y \in \overline{Y}$, 定义两点的距离为

$$d(x,y) = |\xi_y(x)|_{K_x},$$

其中 ξ_y 是 y 所对应的突出元素, $\xi_y(x)$ 表示 ξ_y 映射到 K_x 的值, K_x 表示 x 的逆倾斜的域. 可以验证的是, $d(-,-)$ 给出了一个在 $\overline{Y}$ 上的完备度量.

不难由定义看出, 给定两个在 Gauss 范数意义下靠近的函数, 其零点间的距离能够被函数范数所控制. 更进一步, 定理的结论在极限意义下保持, 也就是说: 若给定 Cauchy 列的每一项都符合定理条件, 那么其极限也符合定理条件. 因此, 我们只需要对于有有限项 Teichmüller 展开的元素验证结论即可. 这时我们把情况约化到了当 f 是关于 "p" 的多项式情况, 此时 $C^\flat$ 代数闭的条件确保了 f 在某一个逆倾斜 K 中有根, 而并非是 K 的一个有限扩张.

下面我们证明定理3.52.

定理 3.52. *设 K 是完美胚域. 如果倾斜域 K^b 是代数闭域, 则 K 也是代数闭域.*

命题 3.68. *设 K 是一个完美域, 使得倾斜域 K^b 是代数闭域, $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in K[x]$ 是一个非常数不可约多项式. 设 y 是 K 中的一个元素. 那么存在一个元素 $y'\in K$ 满足以下条件:*

$$|y-y'|_K\le|f(y)|_K^{1/n}\quad |f(y')|_K\le|pf(y)|_K.$$

从命题3.68证明定理3.52. 设 K 是一个完美域, 使得 K^b 是代数闭域. 我们假设 K 的特征为零（否则没有什么需要证明的）. 我们希望证明 K 是代数闭域, 即每个非常数多项式 $f(x)\in K[x]$ 在 K 中都有一个根. 不失一般性, 我们可以假设 $f(x)$ 是首一不可约多项式, 次数为 $n>0$. 通过替换 $f(x)$ 为 $p^{nd}f\left(\frac{x}{p^d}\right)$, 其中 $d\gg 0$, 我们可以假设 f 的系数属于 $\mathcal{O}_K$. 令 $y_0=0$, 则有 $f(y_0)\in\mathcal{O}_K$, 或等价地, $|f(y_0)|_K\le|p^0|_K$. 应用命题3.68, 我们得出存在 $y_1\in K$, 满足 $|y_0-y_1|_K\le|f(y_0)|_K^{1/n}\le|p^0|_K^{1/n}$ 和 $|f(y_1)|_K\le|pf(y_0)|_K\le|p|_K$. 对于元素 y_1 应用命题3.68, 我们得到一个元素 $y_2\in\mathcal{O}_K$, 满足 $|y_1-y_2|_K\le|f(y_1)|_K^{1/n}\le|p|_K^{1/n}$ 和 $|f(y_2)|_K\le|pf(y_1)|_K\le|p^2|_K$. 继续这样进行, 我们得到一个序列 $y_0=0,y_1,y_2,\ldots\in K$, 满足:

$$|y_m-y_{m+1}|_K\le|p^m|_K^{1/n}\quad |f(y_m)|_K\le|p^m|_K$$

由第一个不等式（以及 K 的完备性）, 我们知道序列 $\{y_m\}$ 收敛于一个元素 $y\in K$. 因此,

$$|f(y)|_K=\lim_{m\to\infty}|f(y_m)|_K=0$$

所以 y 是 f 的一个根. □

引理 3.69. *设 K 是一个对于非阿基米德绝对值 $|\bullet|_K$ 完备的域, $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是一个系数属于 K 的不可约多项式. 如果 a_n 属于 $\mathcal{O}_K$, 则每个 a_i 都属于 $\mathcal{O}_K$.*

证明. 设 L 是 K 上的有限正规扩域, 在 L 上多项式 $f(x)$ 可以分解为 $f(x)=(x-r_1)\cdot$

$(x-r_2)\cdots(x-r_n)$. 我们知道 K 上的绝对值能唯一延拓为 L 的绝对值 $|\bullet|_L$. 由于根 r_i 在 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的作用下是共轭的, 它们必须具有相同的绝对值, 即存在一个实数 λ 满足对所有 i 都有 $|r_i|_L=\lambda$. 于是, $a_n=(-1)^n\prod_{i=1}^n r_i$. 因此, 如果 a_n 属于 $\mathcal{O}_K$, 则每个 r_i 都属于 $\mathcal{O}_L$. 由此可得, 多项式

$$f(x)=\prod_{i=1}^n(x-r_i)$$

的系数属于 $\mathcal{O}_L$, 因此每个 a_i 都属于 $\mathcal{O}_L\cap K=\mathcal{O}_K$, 证毕. □

命题3.68的证明. 设 K 是一个满足 K^b 为代数闭的完美域, $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in K[x]$ 是一个非常数的不可约多项式. 我们希望证明对于每个 $y\in K$, 我们可以找到另一个点 $y'\in K$, 满足以下条件:

$$|y-y'|_K\leq|f(y)|_K^{1/n}\quad|f(y')|_K\leq|pf(y)|_K$$

通过将多项式 $f(x)$ 替换为 $f(x+y)$, 我们可以将问题简化为 $y=0$ 的情况；在这种情况下, 我们希望证明存在 $y'\in K$, 满足以下条件:

$$|y'|_K\leq|f(0)|_K^{1/n}\quad|f(y')|_K\leq|pf(0)|_K$$

假设 $f(0)\neq0$（否则, 我们可以取 $y'=0$, 无需证明）. 注意, K 的价值群与 K^b 的价值群相同, 并且都是可除的（因为 K^b 是代数闭的）. 因此, 我们可以选择一个元素 $c\in K$, 满足 $|c|_K=|f(0)|_K^{1/n}$. 在这种情况下, 我们可以将上述不等式重写为

$$\left|\frac{y'}{c}\right|_K\leq1\quad\left|\frac{1}{c^n}f\left(c\cdot\frac{y'}{c}\right)\right|_K\leq|p|_K$$

通过将 $f(x)$ 替换为首一多项式 $\frac{1}{c^n}f(cx)$（以及 y' 替换为 $\frac{y'}{c}$）, 我们可以简化问题, 使得 $|f(0)|_K=1$. 在这种情况下, 我们希望证明存在 $y'\in K$, 满足以下条件:

$$|y'|_K\leq1\quad|f(y')|_K\leq|p|_K$$

写出 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$. 我们的假设 $|f(0)|_K=1$ 确保 a_n 属于 $\mathcal{O}_K$. 根据如上引理, 我们可以得出每个系数 a_i 属于 $\mathcal{O}_K$. 因此, 我们可以选择 $\mathcal{O}_K^b$ 中的元素 b_i, 满足 $b_i^\sharp\equiv a_i(\mathrm{mod}p)$. 设

$$g(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n\in K^b[x]$$

由于 K^b 是代数闭域, 多项式 $g(x)$ 可以分解为乘积形式

$$g(x)=(x-r_1)\cdots(x-r_n)$$

其中 $r_1,r_2,\ldots,r_n\in K^b$. 注意到我们有

$$|r_1|_{K^b}\cdots|r_n|_{K^b}=|(-1)^n b_n|_{K^b}\leq 1$$

因此, 必然存在 $r\in\{r_1,\ldots,r_n\}$, 满足 $|r|_{K^b}\leq 1$, 即 r 属于 $\mathcal{O}_K^b$. 令 $y'=r^\sharp$, 我们有 $|y'|_K=|r|_{K^b}\leq 1$, 并且

$$\begin{aligned}
f\left(y'\right) &= y'^n+a_1y'^{n-1}+\cdots+a_n \\
&\equiv y'^n+b_1^\sharp y'^{n-1}+\cdots+b_n^\sharp \pmod{p} \\
&= \left(r^\sharp\right)^n+b_1^\sharp\left(r^\sharp\right)^{n-1}+\cdots+b_n^\sharp \\
&\equiv (g(r))^\sharp \pmod{p} \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此, $|f\left(y'\right)|_K\leq|p|_K$, 证毕. $\square$

第四章 向量丛的分类

4.1 线丛和它们的上同调

回顾 Fargues-Fontaine 曲线的定义为

$$X := \mathrm{Proj}\ (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=p^n}).$$

根据一般的代数几何构造, 每个分次模 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=p^n}$ 给出 X 上的一个凝聚层. 特别地, 我们用 $\mathcal{O}_X(m)$ 表示与 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=p^{n+m}}$ 相关联的凝聚层, 其中 m 是任意整数, 其次数为 0 的部分是 $B^{\varphi=p^m}$. 根据定义, 对于任意 $U = X\backslash\{x\}$, 我们有

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(m)) = (B[\frac{1}{\log([\epsilon])}])^{\varphi=p^m},$$

其中 $\epsilon \in 1 + \mathfrak{m}_C^\flat$, 使得 $\log([\epsilon])$ 仅在 x 处为 0. 因此, 凝聚层 $\mathcal{O}_X(m)$ 是一个线丛. 对于每个 $m \in \mathbb{Z}$, 线丛 $\mathcal{O}_X(m)$ 都配备有自然映射

$$\mu_m : B^{\varphi=p^m} \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m)),$$

我们将在稍后证明它们是同构. 请注意, 这是非平凡的, 因为分次模 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=p^n}$ 远非 $\mathbb{Q}_p$-有限型代数.

定理 4.1. 由 $m \mapsto \mathcal{O}_X(m)$ 所定义的映射诱导了一个 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathrm{Pic}(X)$ 的交换群同构.

证明. 单射由于 $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ 随着 m 的变化而变化得到保证. 我们只需证明满性. 我们用 $\mathrm{Div}(X)$ 表示 X 的除子群, 即由 X 的闭点生成的自由 Abel 群. 对于任意除子 $f = \sum n_x x \in \mathrm{Div}(X)$, 我们可以将其关联到一个 Cartier 除子, 即一个理想层, 然后取其逆层 (因为 X 是 Dedekind 的, 所以逆层也是可逆层). 众所周知, 这给出了一个满射

$$\rho : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X).$$

另一方面, 存在一个交换群的态射

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}, \ \sum n_x x \mapsto \sum n_x.$$

定理可以由以下交换图导出:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Div}(X) \arrow[dl, "\deg"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
\mathbb{Z} \arrow[rr, "m\mapsto\mathcal{O}_X(m)"'] & & \mathrm{Pic}(X)
\end{tikzcd}$$

只需证明对于任意闭点 x, 线丛 $\mathcal{O}_X(x)$ 同构于 $\mathcal{O}_X(1)$. 选择 $\epsilon\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$, 使得 $\log([\epsilon])$ 仅在 x 处为 0, 则我们可以将 $\log([\epsilon])$ 视为 $\mathcal{O}_X(1)$ 的一个全局截面. 因此, $\mathcal{O}_X(1)$ 可以看作是其函数域 $\mathcal{K}$ 的常值层的一个子层, 通过以下映射

$$\mathcal{O}_X(1)\to\mathcal{K},\ f\mapsto\frac{f}{\log([\epsilon])}.$$

这个子层正是沿着 ρ 的除子 x 的像, 因此 $\mathcal{O}_X(1)\cong\mathcal{O}_X(x)$. □

定理 4.2. *(1) 对于任意整数 m, 映射 $\mu_m: B^{\varphi=p^m}\to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(m))$ 都是同构.*

(2) 对于任意 $m\geq 0$, 当 $i>0$ 时, 上同调群 $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X(m))$ 都为零.

证明. 设 $t=\log([\epsilon])$ 为 $B^{\varphi=p}$ 中的非零元素, 只在 $x\in X$ 处为零, 其中 $\epsilon\in 1+\mathfrak{m}_C^\flat$. 因此, t 确定了 $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(1))$ 中的一个全局截面, 考虑以下交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B^{\varphi=p^m} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\mu_m"] & B^{\varphi=p^{m+1}} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{m+1}"] & B^{\varphi=p^{m+1}}/tB^{\varphi=p^m} \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(m)) \arrow[r, "t"] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(m+1)) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(m+1)/t\mathcal{O}_X(m)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

我们首先证明, 当 $m\geq 0$ 时, $\nu: B^{\varphi=p^{m+1}}/tB^{\varphi=p^m}\to H^0(X,\mathcal{O}_X(m+1)/t\mathcal{O}_X(m))$ 是一个同构.

回忆任意 $B^{\varphi=p^{m+1}}$ 中的元素都可以分解为 $t_0\cdots t_m$ 的形式, 其中 $t_i\in B^{\varphi=p}$ 是在 $x_i\in X$ 处为零的非零元素. 这样的元素被上述映射所消除, 当且仅当 $t_0\cdots t_m$ 在 $x\in X$ 处为零, 即存在 $0\leq i\leq m$ 满足 $x_i=x$. 因此, t_i 是 t 的单位倍数, 所以 $t_0\cdots t_m\in tB^{\varphi=p^m}$. 这证明了 ν 是一个单射.

为了证明满射性, 我们考虑以下图表:

$$\begin{tikzcd}
B^{\varphi=p}/tB^{\varphi=1} \arrow[r, "t'^m"] \arrow[d, "\nu"'] & B^{\varphi=p^{m+1}}/tB^{\varphi=p^m} \arrow[d, "\nu"] \\
\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(1)/t\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(m+1)/t\mathcal{O}_X(m))
\end{tikzcd}$$

其中 t' 是 $B^{\varphi=p}$ 中的非零元素, 在 $x' \in X$ 处为零, 但不是 x 处为零的元素. 容易验证上面的水平箭头是单射, 下面的水平箭头是同构. 因此, 我们只需要证明 $m = 0$ 的情况即可, 即证明

$$B^{\varphi=p} \xrightarrow{\sim} 1 + \mathfrak{m}_C^\flat \xrightarrow{\log([\bullet])} K_x$$

是满射, 其中 K_x 是 $x \in X$ 的剩余域 (也是 x 的逆倾斜对应). 这是由前一个定理证明的.

对于任意 $m \geq 0$, 因为 $\mathcal{O}_X(m+1)/t\mathcal{O}_X(m)$ 是一个支于单点 $x \in X$ 上的凝聚层, 所以它在一次处的上同调为零. 因此, 我们有以下长正合列:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \xrightarrow{t} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m+1)) \xrightarrow{u} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m+1)/t\mathcal{O}_X(m+1)) \\ \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(m)) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(m+1)) \to 0. \end{aligned}$$

根据前面的结果, 我们知道 $u : \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m+1)) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m+1)/t\mathcal{O}_X(m+1))$ 是满射, 因此乘以 t 会诱导出一个同构 $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(m)) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(m+1))$. 将这个长正合列代入蛇引理中, 我们得到以下同构:

$$\ker(\mu_m) \to \ker(\mu_{m+1}),$$

$$\mathrm{coker}(\mu_m) \to \mathrm{coker}(\mu_{m+1}).$$

让 m 取遍所有非负整数, 我们得到一个直极限的态射, 因此 μ 的核和余核与取余极限后的核和余核相同:

$$B[\frac{1}{t}]^{\varphi=1} \to \varinjlim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \cong \varinjlim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mx)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \mathcal{O}_U),$$

其中 $U = X$ 减去 x 的仿射开子集, 即 x 的零点补集. 根据定义, 这是一个自然同构. 这证明了 μ 是一个同构. 类似地, 我们有以下自然同构:

$$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(m)) \to \varinjlim_{n \geq m} \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(n)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(U, \mathcal{O}_U) = 0$$

证明了命题 (2) 的结论.

为了完成证明, 现在我们只需要证明对于任意 $m > 0$,

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(-m)) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(-mx))$$

都为零. 我们声称, $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(-mx))$ 中的元素可以被识别为在 $x \in X$ 处消失 n 阶的

$\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X)$ 中的非零元素. 为了证明这一点, 我们可以选择两个开仿射子集 $U_1 = X$ 减去 x 和 $U_2 = X$ 减去 x' 来覆盖 X, 然后写出由线丛 $\mathcal{O}_X(-mx)$ 给出的转移函数. 我们可以将 $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(-mx))$ 看作是 $\Gamma(U_2,\mathcal{O}_X)$ 中的子模, 其中包含了限制映射给出的包含映射:

$$\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(-mx)) = \Gamma(X,\mathcal{O}_X(-mx)) \hookrightarrow \Gamma(U_2,\mathcal{O}_X(-mx)) \cong \Gamma(U_2,\mathcal{O}_X)$$

而 $\Gamma(U_2,\mathcal{O}_X)$ 是 X 的函数域 $K(X)$ 的子模. 设 f 是 $\Gamma(U_2,\mathcal{O}_X)$ 中的非零元素, 则 f 是 $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(-mx))$ 的全局截面, 当且仅当 f 在乘上转移函数后落在了 $\Gamma(U_1,\mathcal{O}_X)$ 中. 对于 $\mathcal{O}_X(-mx)$ 的情况, 这等价于 f 可以被 t^n 整除, 并且可以唯一地扩展为一个全局截面. 这证明了我们的声称. 我们知道 $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X) = \mathbb{Q}_p$, 因此不存在这样的非零元素. 因此, 对于任意 $m > 0$, 我们有 $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X(-m)) = 0$. □

注 4.3. 请注意, 对于 $m < 0$, 上同调群 $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{O}_X(m))$ 并不为零.

注 4.4. 设 Y 是一个 (完备) 代数闭域 k 上的代数曲线. 则当且仅当满足以下等价条件时, Y 的亏格为 0:

- Picard 群 $\mathrm{Pic}(Y)$ 同构于 $\mathbb{Z}$.
- 上同调群 $\mathrm{H}^1(Y,\mathcal{O}_Y)$ 为零.

4.2 Harder-Narasimhan 分解

本节证明 Fargues-Fontaine 曲线 X 上的每个向量丛都拥有一个典范的 Harder-Narasimhan 分解. 在这里, “向量丛”指的是局部自由的凝聚层, 而“向量丛之间的映射”指的是两个向量丛之间的凝聚层态射. 需要注意的是, 存在性和唯一性也适用于一般情况下的概形, 详见 [HL10]. 我们仍然固定一个特征为 p 的代数闭完备域 $C^\flat$. 由上一节的结果, 我们有一个称为“次数映射”的同构:

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}.$$

更一般地, 对于任意秩为 r 的向量丛 $\mathcal{E}$, 我们定义 $\mathcal{E}$ 的次数 $\deg(\mathcal{E})$ 为

$$\deg(\mathcal{E}) := \deg(\bigwedge^r \mathcal{E}).$$

需要注意的是, 对于任意的秩为 r', r, r'' 的向量丛的短正合列 $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$, 都决定了一个典范同构

$$\bigwedge^{r} \mathcal{E} \cong (\bigwedge^{r'} \mathcal{E}') \otimes (\bigwedge^{r''} \mathcal{E}''),$$

因此有一个等式 $\deg(\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{E}') + \deg(\mathcal{E}'')$.

定义 4.5. 对于 X 上的任意向量丛 $\mathcal{E}$, 我们定义 $\mathcal{E}$ 的斜率 (slope) 为以下公式:

$$\mu(\mathcal{E}) := \frac{\deg(\mathcal{E})}{\mathrm{rank}(\mathcal{E})}.$$

有些简单的结果可以直接通过定义证明. 设 $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ 是 X 上的非零向量丛的正合列, 则有以下等式:

$$\deg(\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{E}') + \deg(\mathcal{E}''), \quad \mathrm{rank}(\mathcal{E}) = \mathrm{rank}(\mathcal{E}') + \mathrm{rank}(\mathcal{E}'').$$

通过这些等式, 可以轻松地得出以下命题:

- 如果 $\mu(\mathcal{E}') = \mu(\mathcal{E}'')$, 则 $\mu(\mathcal{E}') = \mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}'')$.
- 如果 $\mu(\mathcal{E}') < \mu(\mathcal{E}'')$, 则 $\mu(\mathcal{E}') < \mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{E}'')$.
- 如果 $\mu(\mathcal{E}') > \mu(\mathcal{E}'')$, 则 $\mu(\mathcal{E}') > \mu(\mathcal{E}) > \mu(\mathcal{E}'')$.

定义 4.6. 设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的非零向量丛, λ 是一个有理数. 如果 $\mu(\mathcal{E}) = \lambda$, 并且对于任意的非零子向量丛 $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, 都有 $\mu(\mathcal{E}') \geq \lambda$, 则称 $\mathcal{E}$ 是斜率为 λ 的半稳定 (semistable) 向量丛.

注 4.7. 实际上, 稳定性的概念是针对凝聚层 (coherent sheaf) 定义的, 详见 [HL10]. 我们的定义与凝聚层的定义略有不同, 即对于凝聚层 $\mathcal{F}$, 如果对于任意的非零子凝聚层 $\mathcal{F}'$, 都有 $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$, 则 $\mathcal{F}$ 是半稳定的. 我们声称在我们的情况下这两个定义是等价的.

设 $\mathcal{E}$ 是一个斜率为 λ 的半稳定向量丛, $\mathcal{E}'$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个凝聚子层. 一般来说, 如果我们将 X 替换为任意概形, 则 $\mathcal{E}'$ 不一定是一个向量丛, 但在我们的情况下它是向量丛. 事实上, $\mathcal{E}'$ 是无挠的, 因为 X 是 Dedekind 概形, 任何无挠的凝聚层都是局部自由的. 因此我们可以谈论任何凝聚子层的斜率.

同样, $\mathcal{E}'$ 是一个向量丛, 但不一定是一个子丛 (因为商 $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ 可能不是一个向量丛). 然而, $\mathcal{E}'$ 总是包含在一个相同秩的向量子丛 $\overline{\mathcal{E}'} \subseteq \mathcal{E}$ 中. 注意到 $\deg(\mathcal{E}') \leq \deg(\overline{\mathcal{E}'})$. 为了证明这一点, 我们可以将 $\mathcal{E}'$ 和 $\overline{\mathcal{E}'}$ 替换为 $\bigwedge^r \mathcal{E}'$ 和 $\bigwedge^r \overline{\mathcal{E}'}$, 从而将其简化为 $\mathcal{E}'$ 和 $\overline{\mathcal{E}'}$ 是线丛的情况. 由于对于 $n > m$, 不存在从 $\mathcal{O}_X(n)$ 到 $\mathcal{O}_X(m)$ 的非零映射, 因此这种情况是

平凡的. 因此我们有

$$\mu(\mathcal{E}') \le \mu(\overline{\mathcal{E}'}) \le \mu(\mathcal{E}).$$

此外, 如果 $\mathcal{E}'$ 不是子丛, 则第一个等号是严格的. 因此, 任何 $\mathcal{E}$ 的真子凝聚层都具有斜率 $\le \lambda$.

引理 4.8. 设 $\mathcal{E}$ 是一个斜率为 λ 的向量丛, $\mathcal{E}$ 半稳定. 那么, $\mathcal{E}$ 是半稳定的, 当且仅当对于任意的向量丛的商 $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$, 我们都有 $\mu(\mathcal{E}) \le \mu(\mathcal{F})$.

证明. 令 $\mathcal{E}'$ 是 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 的核, 它适配一个短正合列 $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$. 由于 $\mathcal{E}$ 是半稳定的, 我们有 $\mu(\mathcal{E}') \le \mu(\mathcal{E})$, 因此 $\mu(\mathcal{F}) \ge \mu(\mathcal{E})$. □

命题 4.9. 设 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 是斜率为 λ, μ 的半稳定向量丛. 如果 $\lambda > \mu$, 则任何向量丛之间的映射 $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 都为零, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$.

证明. 如果 $f \neq 0$, 则 $\mathrm{Im}(f)$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个真子层, 根据 Remark 4.7, 它是一个向量丛. 因此, 我们有以下短正合列

$$0 \to \ker(f) \to \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \to 0.$$

由定义和引理4.8, 我们有不等式 $\mu(\mathcal{E}) \le \mu(\mathrm{Im}(f)) \le \mu(\mathcal{F})$, 这与我们的假设 $\lambda > \mu$ 矛盾. □

命题 4.10. 设 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 是两个斜率为 λ 的半稳定向量丛, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是向量丛之间的一个映射. 那么, $\ker(f)$ 和 $\mathrm{coker}(f)$ 是斜率为 λ 的半稳定向量丛.

证明. 如果 $f = 0$, 则没有什么需要证明的. 否则, 我们有不等式

$$\lambda = \mu(\mathcal{E}) \le \mathrm{Im}(f) \le \mu(\mathcal{F}) = \lambda.$$

注4.7 保证 $\mathrm{Im}(f)$ 是 $\mathcal{F}$ 的子丛. 因此, $\ker(f)$ 和 $\mathrm{coker}(f)$ 的斜率均为 λ. $\ker(f)$ 是半稳定的, 因为 $\ker(f)$ 的任何子丛都是 $\mathcal{E}$ 的子丛, 斜率 $\le \lambda$. 为了证明 $\mathrm{coker}(f)$ 是半稳定的, 假设存在斜率为 $\mu(\mathcal{E}') > \lambda$ 的子丛 $\mathcal{E}' \subseteq \mathrm{coker}(f)$. 考虑 $\mathcal{E}'$ 的原像 $\overline{\mathcal{E}'}$, 则我们有以下正合列

$$0 \to \mathrm{Im}(f) \to \overline{\mathcal{E}'} \to \mathcal{E}' \to 0,$$

这意味着 $\overline{\mathcal{E}'}$ 作为 $\mathcal{F}$ 的子丛的斜率严格大于 λ, 这与 $\mathcal{F}$ 是半稳定的矛盾. 因此, $\mathrm{coker}(f)$ 也是半稳定的. □

命题 4.11. 设 $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ 是 X 上的向量丛的正合列. 如果 $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ 是斜率为 λ 的半稳定向量丛, 则 $\mathcal{E}$ 也是斜率为 λ 的半稳定向量丛.

证明. 显然有 $\mu(\mathcal{E}) = \lambda$. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的子丛, 我们只需要证明 $\mu(\mathcal{F}) \leq \lambda$. 设 $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \mathcal{E}'$, $\mathcal{F}''$ 是 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}''$ 中的像. 由于 $\mathcal{E}'$ 和 $\mathcal{E}''$ 是斜率为 λ 的半稳定向量丛, 我们有 $\mu(\mathcal{F}'), \mu(\mathcal{F}'') \leq \lambda$. 根据正合列

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0,$$

我们得到 $\mu(\mathcal{F}) \leq \lambda$. 因此, $\mathcal{E}$ 也是斜率为 λ 的半稳定向量丛. □

推论 4.12. 设 $\mathrm{Coh}(X)$ 表示 X 上的所有凝聚层的范畴, $\mathrm{Vect}_\lambda^{ss}(X)$ 表示斜率为 λ 的半稳定向量丛的全子范畴. 则 $\mathrm{Vect}_\lambda^{ss}(X)$ 在 $\mathrm{Coh}(X)$ 上是闭合于核、余核和扩展的范畴, 特别地, 它是一个 *Abel* 子范畴.

警告 4.13. 所有向量丛的全子范畴不一定是一个 Abel 范畴. 一般来说, 一个向量丛间的态射的余核不一定是一个向量丛.

定义 4.14. 设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的一个向量丛. 如果存在一个满足以下条件的分次

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_m = \mathcal{E}$$

, 则称其为 *Harder-Narasimhan* 分解, 其中

(1) 每个商向量丛 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ 是某个斜率为 λ_i 的半稳定向量丛.

(2) 斜率 λ_i 严格递减, 即 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$.

定理 4.15. 设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的向量丛, 则 $\mathcal{E}$ 有唯一的 *Harder-Narasimhan* 分解.

唯一性的证明. 我们对 $\mathcal{E}$ 的秩进行归纳. 假设存在两个不同的 Harder-Narasimhan 分解

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_m = \mathcal{E},\ 0 = \mathcal{E}'_0 \subsetneq \mathcal{E}'_1 \subsetneq \mathcal{E}'_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}'_{m'} = \mathcal{E}.$$

记 $\lambda_1 = \mu(\mathcal{E}_1), \lambda'_1 = \mu(\mathcal{E}'_1)$, 我们断言 $\lambda = \lambda'$. 否则, 我们可以假设 $\lambda_1 > \lambda'_1$. 根据命题 4.9, 我们有对于任何 $1 \leq i \leq m'$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1}) = 0$. 由于 $\mathcal{E}$ 可以分解成一系列 $\mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1}$ 的商向量丛, 因此 $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}) = 0$, 这是一个矛盾.

由于 $\lambda_1 = \lambda'_1$, 我们得到对于任何 $i > 1$, $\lambda_1 > \lambda'_i$, 这保证了 $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_i/\mathcal{E}'_{i-1}) = 0$, 因此 $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'/\mathcal{E}'_1) = 0$. 特别地, 由于 $\mathcal{E}$ 可以分解成一系列 $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_1$ 的商向量丛, 这意味着 $\mathcal{E}_1$ 到 $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_1$ 的组合映射为零, 即 $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}'_1$. 通过对 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}'_1$ 交换位置使用同样的论证, 我们得到 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}'_1$. 通过归纳, 我们证明了唯一性. □

为了证明存在性, 我们需要找到最大的去稳定子层 (maximal destabilized subsheaf), 即 $\mathcal{E}$ 的子层 $\mathcal{F}$, 使得对于任意的子层 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$, 我们都有不等式 $\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(\mathcal{E})$, 并且在相等的情况下, 有 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. 需要注意的是, 这样的子层 $\mathcal{F}$ 是唯一存在的.

定义 4.16. *这样的 $\mathcal{F}$ 被称为 $\mathcal{E}$ 的最大去稳定子层 (maximal destabilized subsheaf).*

引理 4.17. *设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的一个向量丛, 则存在一个整数 $N(\mathcal{E})$(依赖于 $\mathcal{E}$), 使得对于任意的凝聚子层 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$, 我们都有 $\deg(\mathcal{F}) \leq N(\mathcal{E})$.*

证明. 对 $\operatorname{rank}(\mathcal{E})$ 进行归纳. 如果 $\mathcal{E}$ 是一个线丛, 且同构于 $\mathcal{O}_X(m)$, 那么任何非零子层都可以写成 $\mathcal{O}_X(n)$ 的形式, 其中 $n \leq m$. 因此, 我们可以取 $N(\mathcal{E})$ 为 $\max(\deg(\mathcal{E}), 0)$. 对于任意的向量丛 $\mathcal{E}$, 由于 X 是整体的, 我们可以将 $\mathcal{E}$ 嵌入 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}$ 中, 其中 $\mathcal{K}$ 是 X 的函数域的常值层. 因此, 我们可以从其像中选择任意元素, 得到一个由它生成的线丛 $\mathcal{E}'$, 它是 $\mathcal{E}$ 的一个凝聚子层. 令 $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}/\mathcal{E}'$, 我们有以下正合列

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0,$$

其中 $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ 的秩都小于 $\mathcal{E}$. 通过归纳, 我们可以得到 $N(\mathcal{E}'), N(\mathcal{E}'')$, 然后令 $N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E}') + N(\mathcal{E}'')$. 如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个凝聚子层, 则 $\mathcal{F}$ 可以写成以下正合列的形式

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0,$$

其中 $\mathcal{F}' = \mathcal{E}' \cap \mathcal{F}$, 而 $\mathcal{F}''$ 是 $\mathcal{E}''$ 的一个子层. 由于 $\deg(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}') + \deg(\mathcal{F}'')$, 我们有以下不等式

$$\deg(\mathcal{F}) \leq N(\mathcal{E}') + N(\mathcal{E}'') = N(\mathcal{E}).$$

因此, $N(\mathcal{E})$ 满足所需的条件. $\square$

定理 4.15的证明. 我们将通过证明存在性来完成证明. 设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的一个向量丛, 我们对 $\mathcal{E}$ 的秩进行归纳. 我们要找到最大的非稳定子层并证明其唯一性. 令 S 为所有有理数 λ 的集合, 其中 $\lambda = \mu(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个子层. 由引理4.17, S 有一个最大元 λ, 我们选择秩最大的子丛 $\mathcal{E}''$, 其斜率为 λ. 请注意, 通过选择我们的方式, $\mathcal{E}''$ 的斜率为 λ 且是半稳定的. 我们声称这个 $\mathcal{E}''$ 是唯一的. 否则, 假设 $\mathcal{E}''$ 和 $\mathcal{E}'''$ 是两个这样的子层, 则我们有以下正合列

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{E}'' \oplus \mathcal{E}''' \to \mathcal{E}'' + \mathcal{E}''' \xrightarrow{u} 0,$$

其中 $\mathcal{E}'' + \mathcal{E}'''$ 是由 $\mathcal{E}''$ 和 $\mathcal{E}'''$ 生成的 $\mathcal{E}$ 的子层, u 是带有 $\ker(u) = \mathcal{I}$ 的标准映射. 根据命题4.11, $\mathcal{E}'' \oplus \mathcal{E}'''$ 是斜率为 λ 的半稳定子层, 因此斜率 $\mu(\mathcal{E}'' + \mathcal{E}''') \geq \lambda$. 但是 $\mathcal{E}'' + \mathcal{E}'''$

是 $\mathcal{E}$ 的子层, 所以 $\mu(\mathcal{E}''+\mathcal{E}''')\leq\lambda$, 因此 $\mu(\mathcal{E}''+\mathcal{E}''')=\lambda$, 但如果 $\mathcal{E}''\neq\mathcal{E}'''$, 则秩会更高, 这与选择 $\mathcal{E}''$ 矛盾. 因此 $\mathcal{E}''=\mathcal{E}'''$.

考虑 $\mathcal{E}'=\mathcal{E}/\mathcal{E}''$, 它的秩比 $\mathcal{E}$ 小. 根据归纳假设, $\mathcal{E}'$ 有一个 Harder-Narasimhan 分解

$$0=\mathcal{E}_0\subsetneq\mathcal{E}_1\subsetneq\mathcal{E}_2\subsetneq\cdots\subsetneq\mathcal{E}_m=\mathcal{E}',$$

我们声称 $\mathcal{E}$ 有一个 Harder-Narasimhan 分解

$$0\subsetneq\mathcal{E}''\subsetneq\overline{\mathcal{E}_1}\subsetneq\overline{\mathcal{E}_2}\subsetneq\cdots\subsetneq\overline{\mathcal{E}_m}=\mathcal{E},$$

其中 $\overline{\mathcal{E}_i}$ 是 $\mathcal{E}_i$ 在 $\mathcal{E}$ 中的原像. 根据构造, 连续商是 $\mathcal{E}''$ 和 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$, 其斜率为 $\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, 我们将通过证明 $\lambda>\lambda_1$ 来完成证明. 如果否定, 即 $\lambda=\mu(\mathcal{E}'')\leq\lambda_1=\mu(\mathcal{E}_1)$, 则我们有以下正合序列:

$$0\to\mathcal{E}''\to\overline{\mathcal{E}_1}\to\mathcal{E}_1\to 0,$$

这意味着 $\mu(\overline{\mathcal{E}_1})\geq\lambda$. 这与选择 $\mathcal{E}''$ 矛盾. □

4.3 向量丛和 F-等晶体

在这一节中我们引入一个“半线性”的代数结构 F-等晶体, 并且说明每一个 F-等晶体都能够给出曲线 X 上的一个向量, 并通过分类前者从而给出后者的分类.

定义 4.18. 设 k 是特征为 p 的完全域, $W(k)$ 表示 k 的 Witt 向量环, $K=W(k)\left[\frac{1}{p}\right]$ 表示其分式域. 那么 k 的 Frobenius 自同构诱导出 K 的自同构, 我们用 φ_K 表示该自同构.

一个 k 上的 F-等晶体是一个配备了 Frobenius 半线性自同构的有限维 K 上的向量空间 V: 也就是说, 一个群同构 $\varphi_V:V\to V$ 满足对于 $\lambda\in K$ 和 $v\in V$ 有 $\varphi_V(\lambda v)=\varphi_K(\lambda)\varphi_V(v)$. 一个 F-等晶体的态射 $f:V\to W$ 是一个 K-线性映射, 它与 Frobenius-半线性自同态交换, 即 $\varphi_W\circ f=f\circ\varphi_V$.

例 4.19. 设 X 是一个光滑射影代数簇, 定义在一个完全域 k 上. 那么 (有理化后的) 晶体上同调群 $\mathrm{H}^m_{\text{crys}}(X;W(k))[\frac{1}{p}]$ 具有由绝对 Frobenius 映射 $\varphi:X\to X$ 诱导的 Frobenius 半线性自同构, 因此可以看作是关于 k 的 F-等晶体.

例 4.20. 设 d 和 h 是互质的整数, 且 $n>0$, 令 $V_{\frac{d}{h}}=K^h$. 我们可以通过定义以下方式, 赋予 V 一个 F-等晶体的结构:

$$\varphi_{V_{\frac{d}{h}}}(x_1,x_2,\ldots,x_h)=\left(\varphi_K(x_2),\varphi_K(x_3),\cdots,\varphi_K(x_h),p^d\varphi_K(x_1)\right).$$

这个 F-等晶体的特点是具有一个泛性质：给定一个从 V 到另一个 F-等晶体 W 的映射 (它是 K-线性的且满足 Frobenius 对应), 等价于给定一个属于特征值空间 $W^{\varphi^h=p^d}$ 的元素.

定理 4.21 (Dieudonné-Manin 分类)**.** *设 k 是一个特征为 p 的代数闭域. 那么:*

- *在 k 上 F-等晶体的范畴是半单的. 也就是说, 每个在 k 上的等晶体都可以写成单对象的直和.*
- *在 k 上, 单 F-等晶体正好是形如 $V_{\frac{d}{h}}$ 的对象, 其中 d 和 h 是互质的整数且 $h>0$.*

给定在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的一个 F-等晶体 D, 考虑 $D\otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}B$ 上的对角 Frobenius 作用

$$\varphi: D\otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}B\to D\otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}B, v\otimes b\mapsto \varphi_D(v)\otimes\varphi_B(b).$$

我们能得到一个分次 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B^{\varphi=p^n}$-模, 记作

$$M(D):=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(D\otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}B)^{\varphi=p^n}.$$

例 4.22. 如果 $D=V_{\frac{h}{d}}$, 则

$$M(D):=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B^{\varphi^h=p^{hn+d}}.$$

事实上, 考虑元素 $\sum_{i=1}^h e_i\otimes b_i$, 若它落在 $(D\otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}B)^{\varphi=p^n}$ 中则有

$$p^n(\sum_{i=1}^h e_i\otimes b_i)=\varphi(\sum_{i=1}^h e_i\otimes b_i)=\sum_{i=1}^{h-1}e_{i+1}\otimes\varphi(b)+p^{-d}e_1\otimes\varphi(b_h),$$

比较系数得到对于任意 $1\le i\le h-1$ 有

$$\varphi(b_i)=b_{i+1},\ \varphi(b_h)=p^{d+n}b.$$

因此该元素被 b_1 完全决定, 并且满足 $b_1\in B^{\varphi^h=p^{hn+d}}$.

对于一个分次 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B^{\varphi=p^n}$-模 $M(D)$, 我们能够构造它在 X 上对应的凝聚层 $\mathcal{E}_D$.

例 4.23. 设 $U\subset X$ 是由某个齐次元素 $t\in\bigoplus_{n>0}B^{\varphi=p^n}$ 的零点集给出的仿射开子集. 若 $D=V_{\frac{d}{h}}$, 那么我们有以下结论:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_D(U)&\simeq\left(B\left[\frac{1}{t}\right]\right)^{\varphi^n=p^m}\\&=\left(\rho_*\mathcal{O}_{X_E}(m)\right)(U)\end{aligned}$$

其中 E 是 $\mathbf{Q}_p$ 的无分歧扩张, 其次数为 n, $\rho : X_E \to X$ 是投影映射. 由此可知, $\mathcal{E}_D$ 是一个度为 m, 秩为 n 的半稳定向量丛.

我们现在可以更加精确地陈述关于 X 上半稳定向量丛的分类定理.

定义 4.24. 令 μ 为一个有理数, 我们将其写作 $\mu = \frac{m}{n}$, 其中 m 和 n 互质且 $n > 0$. 如果一个 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的等晶体 V 与例子 5 中的等晶体 $V_{\frac{m}{n}}$ 的直和同构, 则我们称 V 的同构斜率为 μ 的等晶体.

例 4.25. 一个 $\overline{\mathbf{F}}_p$ 上的等晶体的同构斜率为 0, 当且仅当它与 K 的若干个拷贝之和同构. 在这种情况下, 向量丛 $\mathcal{E}_V$ 是若干个 $\mathcal{O}_X$ 的拷贝之和：即它是 X 上的平凡向量丛.

注 4.26. 根据 Dieudonné-Manin 分类, 每个 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的等晶体 V 都可以唯一地分解为不同斜率的同构斜晶体的直和.

定理 4.27. *1. 对于 X 上的每个向量丛 $\mathcal{E}$, 其 Harder-Narasimhan 滤过都是可分解的：即, $\mathcal{E}$ 可以表示为若干个半稳定向量丛的直和 (非唯一).*

2. 对于每个有理数 μ, 构造

$$D \mapsto \mathcal{E}_D$$

诱导了一个范畴的等价

$$\{\text{同构斜率为 } \mu \text{ 的等晶体}\}^{op} \to \{\text{斜率为 } \mu \text{ 的 } X \text{ 上半稳定向量丛}\}$$

注 4.28. X 上的每个向量丛 $\mathcal{E}$ 都可以通过以上构造从某个 $\overline{\mathbf{F}}_p$ 上的等晶体 V 得到.

推论 4.29. *设 $\mathcal{E}$ 是 X 上斜率为 0 的半稳定向量丛, 则 $\mathcal{E}$ 是平凡的 (即它是若干个 $\mathcal{O}_X$ 的拷贝之和).*

我们以证明 Fargues-Fontaine 曲线是几何单联通的结束这一节.

定理 4.30. *Fargues-Fontaine 曲线 X 是几何单连通的：即, 投影映射 $X \to \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}_p)$ 诱导了平展基本群的同构 $\pi_1(X) \to \pi_1\,(\mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}_p)) = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{Q}_p)$. 等价地, 沿着投影映射的拉回*

$$X \to \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}_p)$$

诱导了一个范畴的等价

$$\{\ \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Q}_p) \text{ 的 } \textit{étale} \text{ 覆盖}\} \to \{\ X \text{的 } \textit{étale} \text{ 覆盖}\}.$$

我们需要以下引理：

引理 4.31. 设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 是 X 上斜率分别为 μ 和 μ' 的半稳定向量丛，则张量积 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}'$ 是半稳定的 (斜率为 $\mu+\mu'$).

证明. 根据分类定理，我们可以假设不失一般性地 $\mathcal{E}=\rho_*\mathcal{O}_{X_E}(d)$, 其中 $\rho: X_E\to X$ 是某个 $\mathbf{Q}_p$ 有限扩张 E 的投影映射. 然后, $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}'=(\rho_*\mathcal{O}_{X_E}(d))\otimes\mathcal{E}'=\rho_*\left(\mathcal{O}_{X_E}(d)\otimes\rho^*\mathcal{E}'\right)$. 由于函子 ρ_* 和 ρ^* 保持半稳定性, 我们只需证明张量积函子 $\mathcal{O}_{X_E}(d)\otimes\bullet$ 保持半稳定性, 这很容易从定义证明. □

定理4.30的证明. 设 $\rho:\widetilde{X}\to X$ 是一个有限平展覆盖, 我们希望证明 $\widetilde{X}$ 可以唯一地写成 $X\times_{\operatorname{Spec}(\mathbf{Q}_p)}\operatorname{Spec}(E)$ 的形式, 其中 E 是一个平展 $\mathbf{Q}_p$-代数 (即, 是 $\mathbf{Q}_p$ 的有限扩张的积). 设 $\mathcal{A}=\rho_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$, 并令 $E=\mathrm{H}^0(X,\mathcal{A})$(因此 $E=\mathrm{H}^0\left(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}\right)$ 是 $\mathbf{Q}_p$ 上的一个代数). 为了完成证明, 我们只需证明规范映射 $E\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathcal{O}_X\to\mathcal{A}$ 是一个同构 (这迫使 $\tilde{X}\simeq X\times_{\operatorname{Spec}(\mathbf{Q}_p)}\operatorname{Spec}(E)$, 进而迫使 E 是一个平展 $\mathbf{Q}_p$-代数). 等价地, 我们希望证明向量丛 $\mathcal{A}$ 是平凡的.

根据分类定理, 我们只需证明 $\mathcal{A}$ 是斜率为 0 的半稳定向量丛. 我们首先观察到, 由于 ρ 是一个有限平展态射, 迹配对 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{A}\xrightarrow{\operatorname{tr}}\mathcal{O}_X$ 是非退化的, 因此向量丛 $\mathcal{A}$ 与其对偶 $\mathcal{A}^\vee$ 同构. 由于 $\deg(\mathcal{A})=-\deg\left(\mathcal{A}^\vee\right)$, 因此 $\deg(\mathcal{A})=0$, 从而 $\mathcal{A}$ 的斜率为 0. 假设 $\mathcal{A}$ 不是半稳定的. 令 $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 的 Harder-Narasimhan 滤过的第一步. 则 $\mathcal{A}'$ 是斜率为 $\mu>0$ 的半稳定向量丛. 此外, 对于每个斜率大于 μ 的半稳定向量丛 $\mathcal{E}$, 所有从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{A}$ 的映射都是零. 根据引理 2, 张量积 $\mathcal{A}'\otimes\mathcal{A}'$ 是斜率为 $\mu+\mu>\mu$ 的半稳定向量丛. 因此乘法映射

$$\mathcal{A}'\otimes\mathcal{A}'\hookrightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\xrightarrow{m}\mathcal{A}$$

是零映射. 设 $U\subseteq X$ 是一个仿射开子集, 上面的向量丛 $\mathcal{A}'$ 有一个非零截面 s. 那么 s 可以视为一个在概形 $\widetilde{X}\times_X U$ 上的非零正则函数, 满足 $s^2=0$. 这是不可能的, 因为概形 $\widetilde{X}\times_X U$ 是既约的. □

推论 4.32. 沿着投影映射 $u: X\to\operatorname{Spec}\left(\mathbf{Q}_p\right)$ 的拉回诱导了一个范畴等价:

$$\left\{\text{带有 }\operatorname{Gal}(\mathbf{Q}_p)\text{ 连续作用的有限阿贝尔群}\right\}\to\left\{X\text{ 上的平展局部系统}\right\}.$$

附录 A 进制空间

我们省略所有证明并参考文献 [Hub93] 和 [Hub94].

A.1 拓扑空间

我们回顾一些符号. 设 A 是一个拓扑环. A 的子集 B 被称为*有界的*, 如果对于 A 中的每个 0 的邻域 U, 都存在一个 0 的邻域 V, 使得 $VB := \{v \cdot b \mid v \in V,\ b \in B\} \subseteq U$. 一个元素 $a \in A$ 被称为 A 的*幂有界元素*, 如果集合 $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 是有界的. 设 A° 表示 A 的幂有界元素的集合. 一个元素 a 是 A 中的*拓扑零元*, 如果 $(a^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 构成一个零序列. 设 $A^{\circ\circ}$ 表示 A 的拓扑零元素的集合.

如果存在一个理想 I 满足 $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 是 0 的一个基本邻域系, 则环 A 被称为进制, 同时这样的理想被称为 A 的一个*定义理想*. 对于 A 的子集 S 和 T, 我们定义 $S \cdot T$ 为由形如 $s \cdot t$ 的元素 $s \in S$ 和 $t \in T$ 生成的 A 的子群.

定义 A.1 (Huber 环, [Hub93])**.** 如果存在 A 的子集 U 和 U 的一个有限子集 T, 满足 $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 是拓扑群 $(A, +)$ 的 0 的一个基本邻域系且 $T \cdot U = U^2 \subseteq U$, 则拓扑环 A 被称为 *Huber*.

注 A.2. 这里基本邻域系是指在加法群结构下通常的加法邻域系.

很容易发现, 每个带有有限生成的定义理想的进制环都是 Huber 环. 但并非每个 Huber 环都是进制环. 然而, Huber 证明了以下结果:

定义 A.3. 如果 A 的子环 A° 是开集且在 A 上的子空间拓扑下是进制的, 则 A° 被称为 Huber 环 A 的一个*定义环*.

命题 A.4 (命题 1, [Hub93])**.** *设 A 是带有定义中所述 U, T 的 Huber 环. 则 A 的子环 A° 是定义环当且仅当 A° 在 A 中是开集且有界的. 特别地, 设 W 是 A 中由 U 生成的加法子群, 则 $\mathbb{Z} \cdot 1 + W$ 是一个开集且有界的子环, 因此每个 Huber 环都有一个定义环.*

通过这个命题, 我们可以将 Huber 环看作是一个二元组 (A, A°), 其中 A 是一个拓扑环, A° 是一个带有定义理想的定义环. 我们称 A° (*resp.* I) 为 A 的定义环 (*resp.* 定义理想), 如果不会引起歧义. 或者等价地, 我们可以将 A 上的拓扑视为在 A° 上的进制拓扑给出的. 注意, 如果选择不同的定义环, A 上的拓扑可能会有所不同.

现在我们讨论进制谱. 首先我们回顾一些关于谱空间的符号.

命题 A.5. *设 X 是一个拓扑空间. 则以下陈述等价:*

1. *X 是一个谱空间, 即 X 同胚于某个环 $\operatorname{Spec} A$.*

2. *X 是拟紧的, 有一个稳定于有限交的拟紧开集基, 并且每个不可约闭子集都是唯一点的闭包.*

Zariski 谱 $A \mapsto \operatorname{Spec} A$ 是从环范畴到谱空间范畴的一个反变函子. 类似地, 使用环的赋值我们将构造一个从拓扑环范畴到谱空间范畴的反变函子.

设 Γ 是一个全序可数阿贝尔群, 用乘法记号表示. 我们添加一个元素 0 到 Γ 中并将乘法和 Γ 上的全序扩展到 $\Gamma \cup \{0\}$ 中, 令 $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ 且 $0 \leq \alpha$ 对于所有的 $\alpha \in \Gamma \cup \{0\}$ 均成立.

定义 A.6. 设 $v : A \to \Gamma \cup \{0\}$ 是一个值域为 $\Gamma \cup \{0\}$ 的 A 的赋值, 则满足以下条件:

1. $v(0) = 0$ 且 $v(1) = 1$.

2. 对于所有 $x, y \in A$, 有 $v(xy) = v(x)v(y)$.

3. 对于所有 $x, y \in A$, 有 $v(x + y) \leq \max(v(x), v(y))$.

设 $v : A \to \Gamma \cup \{0\}$ 是一个赋值. 由 $\operatorname{Im}(v)$ 生成的 Γ 的子群称为 v 的值群, 记为 Γ_v. 集合 $\operatorname{supp}(v) := v^{-1}(0)$ 是 A 的一个素理想, 称为 v 的支集. 赋值 v 可以唯一分解成

$$A \longrightarrow K \xrightarrow{\overline{v}} \Gamma \cup \{0\},$$

其中 $K := \operatorname{Frac}(A/\operatorname{supp}(v))$, $\overline{v}$ 是 K 上的一个赋值. 我们将 $\overline{v}$ 的赋值环记为 $A(v)$, 即 $A(v) = \{x \in K \mid \overline{v}(x) \leq 1\}$. 如果满足以下等价条件, 则称两个赋值 v 和 w 是等价的:

1. 存在一个有序单调同构 $f : \Gamma_v \cup \{0\} \to \Gamma_w \cup \{0\}$ 使得 $w = f \circ v$.

2. $\operatorname{supp}(v) = \operatorname{supp}(w)$ 且 $A(v) = A(w)$.

3. 对于所有 $a, b \in A$, 有 $v(a) \geq v(b)$ 当且仅当 $w(a) \geq w(b)$.

设 A 是一个环（不一定是拓扑环）. 我们将 $S(A)$ 表示为 A 的赋值等价类的集合. 设 T 是由形如 $\{v \in S(A) \mid v(a) \leq v(b) \neq 0\}$ 的集合生成的拓扑. 我们称拓扑空间 $\operatorname{Spv} A := (S(A), T)$ 为 A 的赋值谱. 由于上述等价条件, 我们有以下集合之间的双射:

$$\operatorname{Spv} A \longleftrightarrow \left\{ (\mathfrak{p}, [v]) \;\middle|\; \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \overline{v} \text{ 在 } \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}) \text{ 上的赋值} \right\}$$

其中 $[v]$ 表示 v 的等价类.

命题 A.7 (命题 2.2, [Hub93])**.** *空间 $\operatorname{Spv} A$ 是一个谱空间.*

现在我们假设 A 是一个 Huber 环, 则 A 的赋值 v 称为连续的, 如果对于每个 $\gamma \in \Gamma$, 存在 0 的一个邻域 U, 使得对于任意 $u \in U$, 都有 $v(u) < \gamma$. 我们将 $\operatorname{Cont} A := \{v \in \operatorname{Spv} A \mid v \text{ 连续}\}$ 称为 A 的连续赋值.

定理 A.8 (推论 3.2, [Hub93])**.** *Cont A 关于 Spv 诱导的拓扑是谱的.*

然而, 记号 Cont A 仍然距离我们最终的进制空间模型还有一步. 在许多情况下, 空间 Cont A 仍然有一些我们需要摆脱的点. 例如, 考虑环

$$\mathbb{Q}_p\langle T\rangle := \left\{ f \in \mathbb{Q}_p[\![T]\!] \;\middle|\; f = \sum_{n\geq 0} a_n T^n, a_n \in \mathbb{Q}_p, a_n \to 0 \right\}$$

它的定义环为 $\mathbb{Z}_p\langle T\rangle$, 定义理想为 $p\mathbb{Z}_p\langle T\rangle$. 在 Tate 的设置中, 我们可以将极大谱 Spm $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle$ 识别为 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上的闭单位元. 对于 $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle$ 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$, 商环 $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle/\mathfrak{m}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张, 我们可以将 p-进赋值扩展到 $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle/\mathfrak{m}$ 上. 因此, 存在一个映射 Spm $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle \to$ Cont $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle$. 但是后者包含比我们预期的要多得多的点. 我们可以定义一个点 $x^+ \in$ Cont $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle$ 如下: 令 $\Gamma = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \gamma^{\mathbb{Z}}$, 其中的序由 $1 < \gamma < \alpha$ 确定, 其中 $\alpha > 1$ 是任意实数. 现在通过以下方式定义 x^+:

$$\mathbb{Q}_p\langle T\rangle \to \Gamma, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \to \sup_{n\geq 0} |a_n|\gamma^n.$$

因此, x^+ "认为" T 比 1 大一个无穷小量. 类似地, 我们可以定义一个 x^-, 它比 1 还要小. 由于我们期望 Cont $\mathbb{Q}_p\langle T\rangle$ 是单位闭圆盘, 因此 x^+ 不应该包含在其中. 为了达到这个目的, 我们要求所有连续赋值都将 A 的一个子环映射到 $\Gamma_{\leq 1} \cup \{0\}$.

定义 A.9. 设 A 是一个 Huber 环, A^+ 是 A 中的一个开积和整闭子环, 那么 A^+ 是 *积分元素环*, 一个 *Huber 对*指的是一个形如 (A, A^+) 的二元组, 其中 A 是 Huber 环, A^+ 是 A 的一个积分元素环. 我们定义

$$\operatorname{Spa}(A, A^+) := \left\{ v \in \operatorname{Cont} A | v(a) \leq 1 \;\forall\; a \in A^+ \right\},$$

其中拓扑是 Cont A 的诱导拓扑.

注 A.10. 从现在开始, 我们将把每个赋值 $x \in \operatorname{Spa}(A, A^+)$ 看作 "点", 因此对于每个 $f \in A$, 我们用 $|f(x)|$ 表示 f 在 x 处的赋值. 为了简化, 有时我们会写成 Spa A. 需要注意的是, 如果我们选择不同的 A^+, 则 Spa A 中的点也会随之变化. 在前面的例子中, 空

间 Spa $(\mathbb{Q}_p\langle T\rangle, \mathbb{Z}_p\langle T\rangle)$ 不包含 x^+, 而 Spa $(\mathbb{Q}_p\langle T\rangle, A^{++})$ 包含它, 其中

$$A^{++} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{Z}_p\langle T\rangle \;\middle|\; |a_n| < 1 \ \forall\, n \geq 1 \right\}.$$

事实上, Huber 证明了一个更一般的结论：设 $\mathcal{F}_A$ 是 Cont A 的 pro-constructible 子集的集合, 它们是以下形式的集合的交集：$\{x \in \mathrm{Cont}\ A \mid |f(x)| \leq 1\}$, 其中 $f \in A$. 设 $\mathcal{G}_A$ 是 A 的子环的集合, 它们是 A 的开积和整闭子环（注意到 $A^\circ \in \mathcal{G}_A$）. 那么以下定理成立：

引理 A.11 (定理 3.3, [Hub93]). *映射 $\sigma : \mathcal{G}_A \to \mathcal{F}_A$, $G \mapsto \{x \in \mathrm{Cont}\ A \mid |g(x)| \leq 1 \text{ for } g \in G\}$ 是双射, 其逆映射 $\tau : \mathcal{F}_A \to \mathcal{G}_A$, $F \mapsto \{f \in A \mid |f(x)| \leq 1 \text{ for } x \in F\}$.*

设 (A, A^+) 是一个 Huber 对. 对于形如

$$R(\frac{T_1}{s_1}, \cdots, \frac{T_n}{s_n}) := \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ v \in \mathrm{Spa}\ A \;\middle|\; v(t_i) \leq v(s_i) \neq 0 \text{ for all } t_i \in T_i \right\}$$

其中 $s_1, \cdots s_n \in A$ 以及 $T_1, \cdots, T_n \subseteq A$ 是 A 中的有限子集, 且对于 $i = 1, \ldots, n$, 都有 $T_i \cdot A$ 在 A 中是开集, 则称其为有理集.

定理 A.12 (Huber 在 [Hub93] 中的定理 3.5). *(1) Spa A 是一个谱空间.*

(2) 有理集构成 Spa A 的一个拓扑基, 且每个有理集都可以在 Spa A 中表示为构造集.

(3) 对于任意 Spa A 的有理集 U, 都存在一个元素 $s \in A$ 和一个有限子集 $T \subseteq A$, 使得 $T \cdot A$ 在 A 中是开集, 并且 $U = R(\frac{T}{s})$.

注意到 Spa 的构造是函子性的. 我们定义 Huber 对之间的态射 $\varphi : (A, A^+) \to (B, B^+)$ 为连续环同态 $\varphi : A \to B$ 满足 $\varphi(A^+) \subseteq B^+$. 一个 Huber 对之间的态射可以诱导出谱空间之间的态射 Spa $B \to$ Spa A.

定理 A.13. *规范映射 $g : \mathrm{Spa}\ \hat{A} \to \mathrm{Spa}\ A$ 是一个同胚, 其中 $\hat{A}$ 是 A 的完备化, 且它把有理集映射为有理集.*

注 A.14. 对于 $K/\mathbb{Q}_p$ 上的 Tate 代数, 即一个 K-代数 A 并配以一个满射

$$K\langle T_1, \cdots, T_n\rangle \twoheadrightarrow A,$$

我们有以下结论 [Hub93]：

(1) 存在一个自然的映射

$$\mathrm{Spm}\ A \to \mathrm{Spa}\ A,$$

其中 Spm A 是 A 的最大谱. 这个映射的像在 Spa A 的构造拓扑下是稠密的.

(2) 如果 X_1, X_2 是 Spa A 的构造子集且 $X_1 \cap \mathrm{Spm}\ A = X_2 \cap \mathrm{Spm}\ A$, 那么 $X_1 = X_2$.

(3) 在刚性解析几何中, 我们可以给 A 配以一个 Grothendieck 拓扑 $\mathcal{J}_A$. $\mathcal{J}_A$ 的层范畴与 Spa A 的层范畴是自然同构的.

(4) 在 [Sch11] 中, 给出了 Spa $K\langle T\rangle$ 上点的分类结果.

A.2 结构预层

现在我们的目标是定义一个在 $X = \mathrm{Spa}\ (A, A^+)$ 上的"解析函数"结构(预)层, 其中 (A, A^+) 是一个 Huber 对. 在代数几何中, 我们定义 Spec A 上的结构层的策略是: 首先定义 $\mathcal{O}_X(D(f))$ 上的函数, 其中 $D(f)$ 是由 f 定义的一个主开集; 然后对于任意开集 U, 我们将其截面定义为 $D(f)$ 上截面的逆极限.

类似地, 我们为有理集 $U = \bigcap_{i=1}^n \{v \in \mathrm{Spa}\ A \mid v(t_i) \le v(s_i) \ne 0 \text{ for } t_i \in T_i\}$ 定义 $\mathcal{O}_X(U)$. 当然, A 中的每个元素都可以定义 U 上的解析函数; $s_1, \cdots, s_n$ 也应该定义一个解析函数, 因为它们在 U 上可逆. 此外, 这些解析函数在"取极限"时是完备的, 因此我们需要在 $A_{s_1 \cdots s_n} = A[\frac{1}{s_1}, \cdots, \frac{1}{s_n}]$ 上定义一个拓扑, 并将 $\mathcal{O}_X(U)$ 定义为在此拓扑下的 $A_{s_1 \cdots s_n}$ 的完备化.

定义 A.15. 设 A 是一个 Huber 环, $s_1, \cdots, s_n \in A$, $T_1, \cdots, T_n \subseteq A$ 是 A 的有限子集, 满足 $T_i \cdot A$ 在 A 中是开集. 设 A° (*resp.* I) 是一个定义环 (*resp.* 理想). 设 Y 是分数环 $A_{s_1 \cdots s_n}$ 的群拓扑, 满足

$$\left\{ I^n \cdot B \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

是 0 的一个基本邻域, 其中 B 是 $A_{s_1 \cdots s_n}$ 的子环 $A^\circ[\frac{t_i}{s_i} | \, t_i \in T_i]$. 则 $\mathcal{T}$ 是一个环拓扑, 并且与 A° 和 I 的选择无关. 拓扑环 $A_{s_1 \cdots s_n}$ 记作 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$. $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 的完备化记作 $A\langle \frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n} \rangle$.

设 $A^\triangle = (A, A^+)$ 是一个 Huber 对, $s_1, \cdots s_n \in A$, $T_1, \cdots, T_n \subseteq A$ 是 A 的有限子集, 满足 $T_i \cdot A$ 在 A 中是开集. 设 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})^+$ 是 $A_{s_1 \cdots s_n}$ 中 $A^+[\frac{t_i}{s_i} | \, t_i \in T_i]$ 的积, 即 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})^+$ 是 $A_{s_1 \cdots s_n}$ 中 $A^\triangle(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 的积. 则 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 是 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 的整元环. 我们将 $A^\triangle(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 记作 $(A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n}), A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})^+)$, 将它们的完备化记作 $A^\triangle\langle \frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n} \rangle$.

注 A.16. 我们对 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 的定义立即导出以下的泛性质:

(1) 拓扑环 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 是 Huber 环, 从 A 到 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 的典范环态射是连续的, 并且 $h(s_i) \in A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})^*$, $h(\frac{t_i}{s_i}) \in A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})^\circ$. 如果 $f : A \to B$ 是任何一个满足上

述条件的连续环态射, 即 B 是一个 Huber 环, 使得 $f(s_i) \in B^*$, $f(\frac{t_i}{s_i}) \in B^\circ$, $t_i \in T_i$, 那么 f 通过唯一的 Huber 环态射 $\widetilde{f}: A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n}) \to B$ 分解.

(2) 设 $A^\triangle = (A, A^+)$ 是一个 Huber 对. 则从 A 到 Huber 对 $A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 的典范环态射 h 是连续的, 其中 $h(s_1) \in A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})^*$, $h(\frac{t_i}{s_i}) \in A(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})^+$, $i = 1, \dots, n$, $t_i \in T_i$. 如果 $f : A^\triangle \to B^\triangle$ 是 Huber 对之间的一个态射, 其中 $B^\triangle = (B, B^+)$, 满足 $f(s_i) \in B^*$, $f(\frac{t_i}{s_i}) \in B^+$, $i = 1, \dots, n$, $t_i \in T_i$, 那么 f 通过唯一的 Huber 对态射 $\widetilde{f}: A^\triangle(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n}) \to B$ 分解.

定义 A.17. 我们定义 $\mathcal{O}_X(R(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})) := A\langle\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n}\rangle$.

设 $U = R(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 是 Spa A 中的一个有理子集. 标准映射 $h : \hat{A} \to A\langle\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n}\rangle$ 引出了一个连续映射 $\mathrm{Spa}(h) : \mathrm{Spa}\ A^\triangle(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n}) \to \mathrm{Spa}\ \hat{A} \simeq \mathrm{Spa}\ A$, 它是一个同胚映射, 将 Spa $A^\triangle(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 映射为 U. 此外, 存在一个双射(通过 $\mathrm{Spa}(h)$)将 Spa $A^\triangle(\frac{T_1}{s_1}, \dots \frac{T_n}{s_n})$ 中的有理子集与包含于 U 的 Spa A 的有理子集相对应.

不同有理子集之间的标准映射是"相容的", 具体来说, 设 U, V 是两个有理子集, 其中 $V \subseteq U$. 我们用 $A_U^\triangle$ (或 $A_V^\triangle$) 表示给定 U (或 V) 的 Huber 对, 用 $h_{X,U} : A^\triangle \to A_U^\triangle$ 和 $h_{X,V} : A^\triangle \to A_V^\triangle$ 表示相应的标准映射. 那么存在一个 Huber 对之间的态射 $h_{U,V} : A_U^\triangle \to A_V^\triangle$. 由于标准映射的通用性质, 我们有 $h_{X,V} = h_{U,V} \circ h_{X,U}$.

现在对于任意开子集 U, 我们定义

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{\substack{V \subseteq U \\ V \text{ rational}}} \mathcal{O}_X(V),$$

其中极限是在所有包含于 U 的有理子集 V 上取的. 因此, 我们得到了一个定义在完备拓扑环上的进制空间 $X = \mathrm{Spa}\ A$ 上的预层 $\mathcal{O}_X$, 它的值域是完备的拓扑环.

对于每个 $x \in \mathrm{Spa}\ A$, 我们以类似的方式定义了该点处的茎:

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{\substack{x \in U \\ U \text{ rational}}} \mathcal{O}_X(U).$$

对于每个包含 x 的有理子集 U, 赋值 $x : A \to \Gamma_x \cup \{0\}$ 唯一地扩展为连续赋值 $v_U : \mathcal{O}_X(U) \to \Gamma_x \cup \{0\}$, 从而扩展为赋值

$$v_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \Gamma_x \cup \{0\}.$$

因此, 我们得到了一个三元组 $(\mathrm{Spa}\ A, \mathcal{O}_X, (v_x)_{x \in \mathrm{Spa}\ A})$, 其中 Spa A 是一个拓扑空间, $\mathcal{O}_X$ 是定义在其上的完备拓扑环预层, v_x 是 $\mathcal{O}_{X,x}$ 上的赋值, 这将成为我们进制空间的模型.

对于 Spa A 的每个子集 U, 我们定义

$$\mathcal{O}_X^+(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}_X(U) \;\middle|\; v_x(f) = |f(x)| \le 1 \text{ for } x \in U \right\},$$

那么 $\mathcal{O}_X^+$ 是 Spa A 上的一个环预层. 对于每个 $x \in \operatorname{Spa} A$, $\mathcal{O}_X^+$ 在 x 处的茎为

$$\mathcal{O}_{X,x}^+ = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}_X^+(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \;\middle|\; v_x(f) = |f(x)| \le 1 \right\}.$$

命题 A.18 ([Hub94] 中的命题 1.6). *1.* *对于每个 $x \in \operatorname{Spa} A$, 茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是一个局部环, $\mathcal{O}_{X,x}$ 的极大理想是 v_x 的支集.*

2. *对于每个 $x \in \operatorname{Spa} A$, 茎 $\mathcal{O}_{X,x}^+$ 是一个局部环. 我们有 $\mathcal{O}_{X,x}^+ = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid v_x(f) \le 1\}$, 它的极大理想是 $\{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid v_x(f) < 1\}$.*

3. *对于 Spa A 的每个开子集 U 和每个 $\mathcal{O}_X(U)$ 中的 f, g, 集合 $\{x \in U \mid v_x(f) \le v_x(g) \ne 0\}$ 在 Spa A 中是开集.*

注 A.19. 注意, 预层 $\mathcal{O}_X$ 可能不是一个层, 参见 [Hub94] 第一节的结尾.

定义 A.20. 我们记 $\mathcal{V}$ 为以下范畴：对象是三元组 $X = (X, \mathcal{O}_X, (v_x)_{x \in X})$, 其中 X 是一个拓扑空间, $\mathcal{O}_X$ 是 X 上的一个完备拓扑环层, v_x 是茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ 上的一个赋值；态射 $f : X \to Y$ 是局部环空间之间的态射, 且在茎上诱导的连续环同态 $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ 与 v_x, $v_{f(x)}$ 相容, 即 $v_{f(x)} = v_x \circ f_x^\sharp$.

仿解进制空间是 $\mathcal{V}$ 中的一个对象, 它同构于 Huber 对 (A, A^+) 的仿解空间 Spa A. 进制空间是 $\mathcal{V}$ 中的一个对象 $X = (X, \mathcal{O}_X, (v_x)_{x \in X})$, 它在局部是仿解进制空间的形式, 即对于每个 $x \in X$, 存在一个开邻域 $U \subset X$, 使得 $(U, \mathcal{O}_X|_U, (v_x)_{x \in U})$ 是仿解进制空间. 一个进制空间之间的态射 $X \to Y$ 是 $\mathcal{V}$ 中的态射.

我们将使用以下定理.

定理 A.21 ([Hub94] 中的定理 2.2). *设 (A, A^+) 是一个 Huber 对. 如果 A 是一个强 Noether Tate 环, 则结构预层 $\mathcal{O}_X$ 在 $X = \operatorname{Spa}(A, A^+)$ 上是一个层, 因此 X 是一个进制空间.*

参考文献

[Far15] Laurent Fargues. Quelques résultats et conjectures concernant la courbe. *Astérisque*, (369):325–374, 2015.

[FF18] Laurent Fargues and Jean Marc Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de hodge p-adique. *Astérisque*, 406:1–382, 2018.

[FO22] Jean-Marc Fontaine and Yi Ouyang. *Theory of p-adic Galois representations*. 2022.

[FS21] Laurent Fargues and Peter Scholze. Geometrization of the local langlands correspondence. 2021.

[HL10] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2 edition, 2010.

[Hub93] Roland Huber. Continuous valuations. *Mathematische Zeitschrift*, 212:455–477, 1993.

[Hub94] Roland Huber. A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Mathematische Zeitschrift*, 217:513–551, 1994.

[Hub96] Roland Huber. Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces. 1996.

[Ked16] Kiran S. Kedlaya. Noetherian properties of Fargues-Fontaine curves. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8):2544–2567, 2016.

[KL15] Kiran S. Kedlaya and Ruochuan Liu. Relative p-adic Hodge theory: foundations. *Astérisque*, (371):239, 2015.

[Lur] Jacob Lurie. Lecture notes of ff curve.

[Sch11] Peter Scholze. Perfectoid spaces. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 116:245–313, 2011.

[Wei17] Jared Weinstein. Arizona winter school 2017: Adic spaces. 2017.

致谢

在本篇毕业论文完成之际, 我想要向所有关心、支持和帮助过我的人表示深深的感谢之意, 包括但不限于所有老师、家人和朋友. 感谢你们在我学业和生活中的陪伴和支持, 让我顺利完成这篇论文. 此外, 还有些人我想要特别鸣谢.

感谢我未来的导师于如冈教授. 是他让我遇到这样一个如此美妙的课题.

感谢我的指导老师孙浩教授. 他在过去两年中每周都会抽出固定的时间来和我讨论、回答我的问题, 这不仅仅只是在完成毕业设计的阶段进行. 我十分感激他对于我的数学研究生涯所付出的努力和所做的贡献. 没有他的指导与帮助，我几乎没有完成这个课题的能力.

感谢庄若虹同学. 在完成论文的时间里, 我们互相陪伴、互相鼓励.

最后, 这篇稚嫩而蹩脚的论文并非是结束, 而是未来研究的起点. 它像一个精美简短的前奏, 把我引向更宏大的乐章. 通过它, 我得以窥见数论图景的一角. 继续往后走, 更加精彩也更加艰难. 至此, 祝自己未来的研究生涯顺利.